

# Studierhinweise zu Lektion 1

Analysis (Modul 61211)

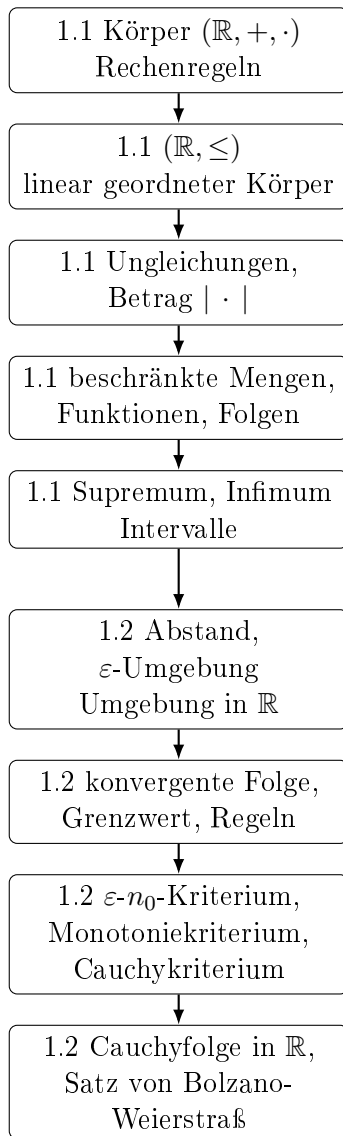
Diese Kurseinheit dient der Einführung des Raumes  $\mathbb{R}^n$  und einiger seiner Strukturen. Die ersten beiden Abschnitte bieten einen Rückblick auf den Kurs Mathematische Grundlagen (MG) – wer den Stoff noch gut im Gedächtnis hat, kann sie zunächst überfliegen, sollte aber die eingefügten Ergänzungen nicht verpassen.

Vom dritten Abschnitt an werden neue Begriffsbildungen vorgestellt, denen sich  $\mathbb{R}^n$  als wichtiges Beispiel unterordnet: reeller Vektorraum, normierter Raum, Umgebung eines Punktes. Besonders wichtig sind der Konvergenzbegriff und der Vollständigkeitsbegriff (Abschnitt 1.5). Abgesehen davon, dass es sich bei den neuen Begriffen um genaue Analogien zu schon Bekanntem aus MG handelt, besitzen die meisten eine anschaulich-geometrische Deutung, sodass man mit ihnen bald sicher umgehen kann.

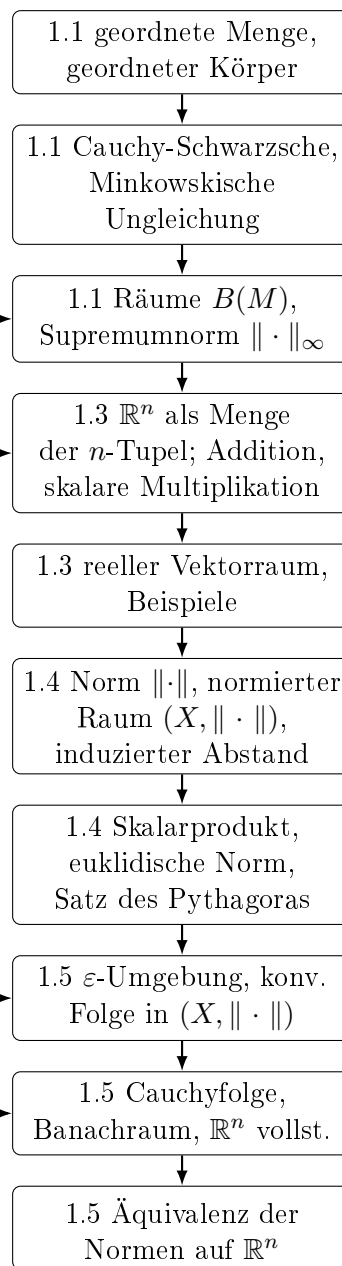
# Struktur der Kurseinheit 1

---

## Rückblick auf MG



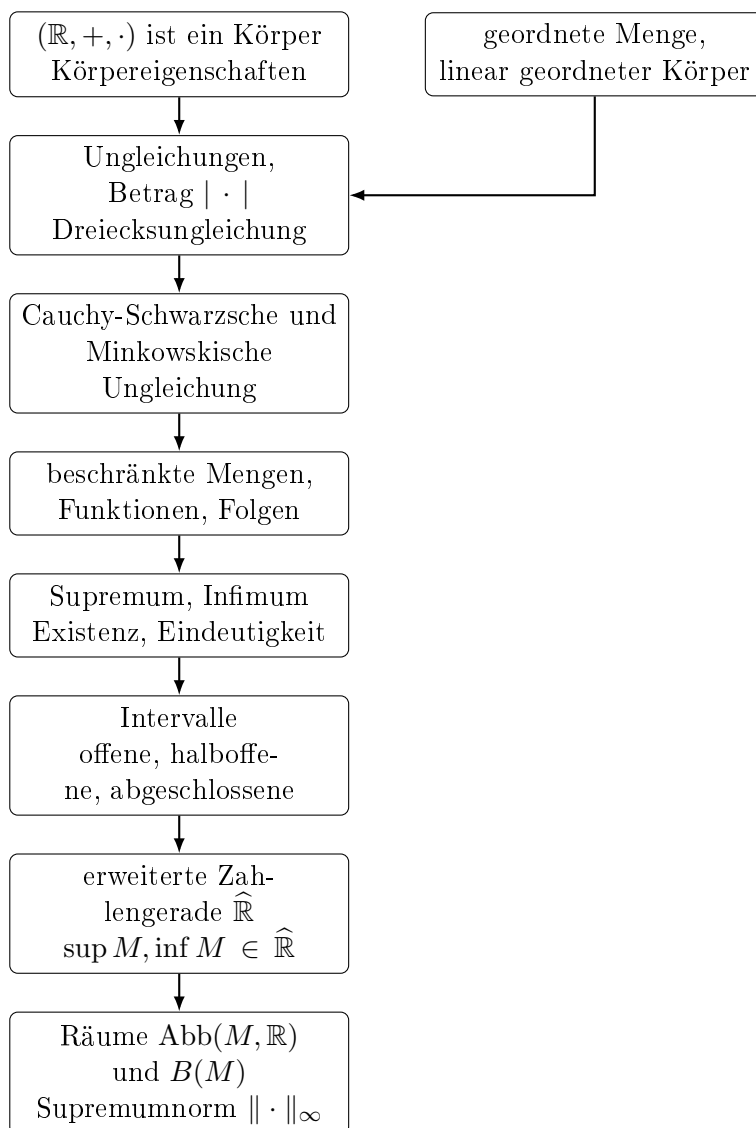
## Ergänzungen und neue Inhalte



## Zielelement 1.1 – Rückblick und Ergänzungen: Reelle Zahlen

---

### Lerninhalte



### Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die Körpereigenschaften von  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  und die Ordnungseigenschaften von  $(\mathbb{R}, \leq)$  benennen und erläutern können,
- Ungleichungen mit dem Betrag sicher handhaben und die Cauchy-Schwarzsche sowie Minkowskische Ungleichung kennen,
- die Begriffe beschränkte Menge, Supremum und Infimum definieren und die Existenz des Supremums in  $\mathbb{R}$  kennen,
- die Intervalltypen unterscheiden und die erweiterte Zahlengerade  $\widehat{\mathbb{R}}$  beschreiben können,
- den Raum  $B(M)$  der beschränkten Funktionen und die Supremumnorm  $\|\cdot\|_\infty$

kennen.

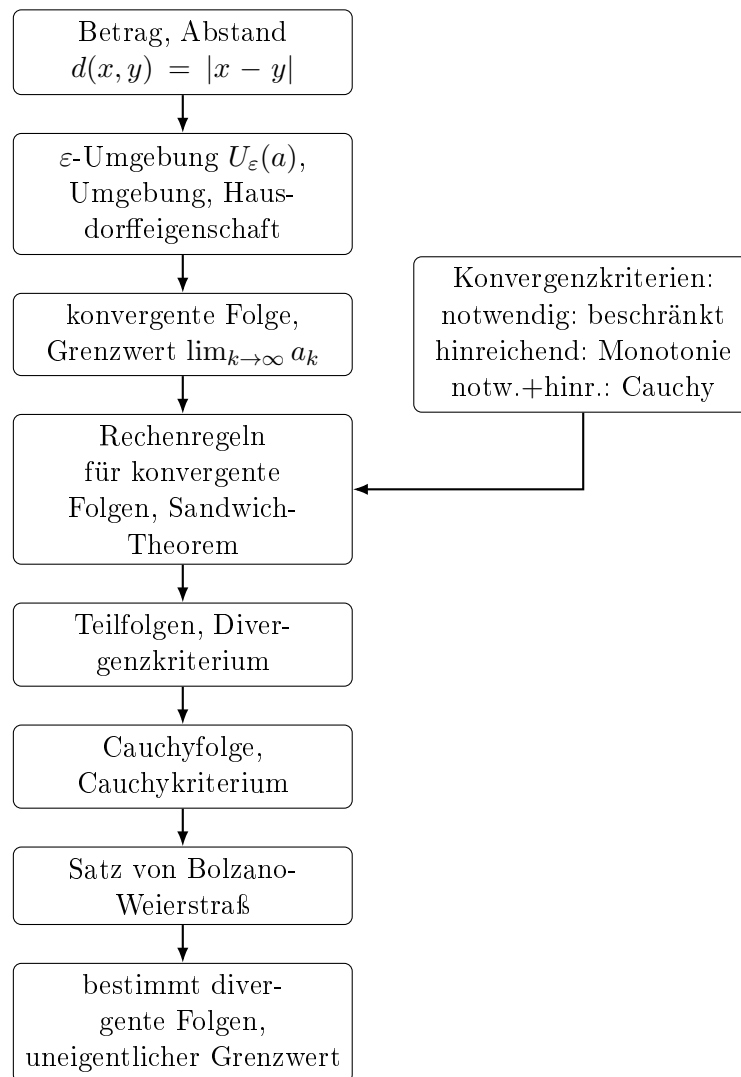
### **Selbstkontrollelement 1.1**

Sehen Sie, dass die Menge  $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nicht nach oben beschränkt ist? – Können Sie einen Beweis angeben?

## Zielelement 1.2 – Rückblick und Ergänzungen: Konvergenz

---

### Lerninhalte



### Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Begriff der Umgebung mit der  $\varepsilon$ -Umgebung in Verbindung bringen und die wichtigsten Eigenschaften von Umgebungen angeben können,
- das  $\varepsilon$ - $n_0$ -Kriterium, das Monotoniekriterium und das Cauchy-kriterium für konvergente Folgen kennen und anwenden können,
- mit Teilfolgen und dem Divergenzkriterium arbeiten können,
- den Satz von Bolzano-Weierstraß formulieren und anwenden können,
- bestimmt divergente Folgen und uneigentliche Grenzwerte erklären können.

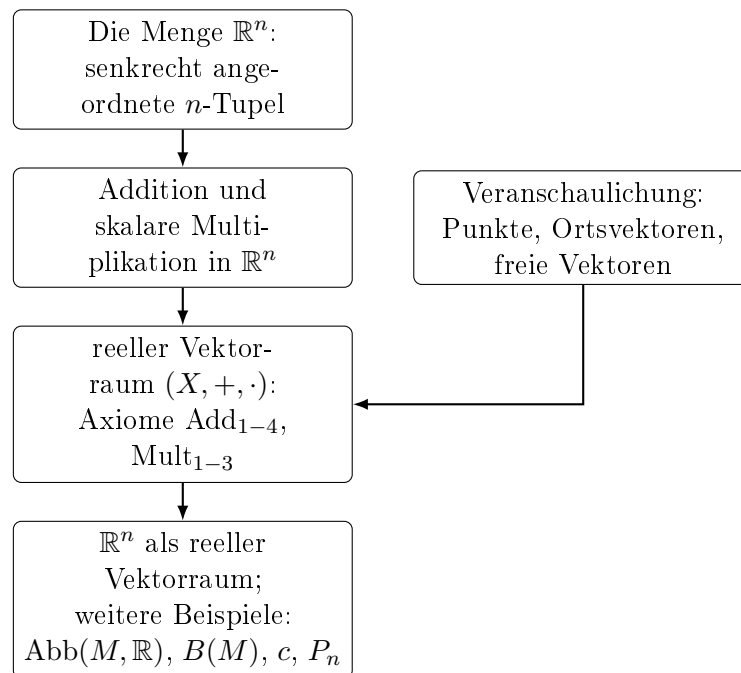
### **Selbstkontrollelement 1.2**

Können Sie einige Bedingungen (notwendig und/oder hinreichend) dafür nennen, dass eine Folge keine Cauchyfolge ist?

## Zielelement 1.3 – $\mathbb{R}^n$ als reeller Vektorraum

---

### Lerninhalte



### Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Raum  $\mathbb{R}^n$  (Elemente, Addition, skalare Multiplikation) beschreiben und für  $n = 2, 3$  geometrisch veranschaulichen können,
- die Axiome eines reellen Vektorraums aufzählen und überprüfen können,
- $\mathbb{R}^n$  als Beispiel eines reellen Vektorraums einordnen und weitere Beispiele (Funktionsräume, Folgenräume) kennen.

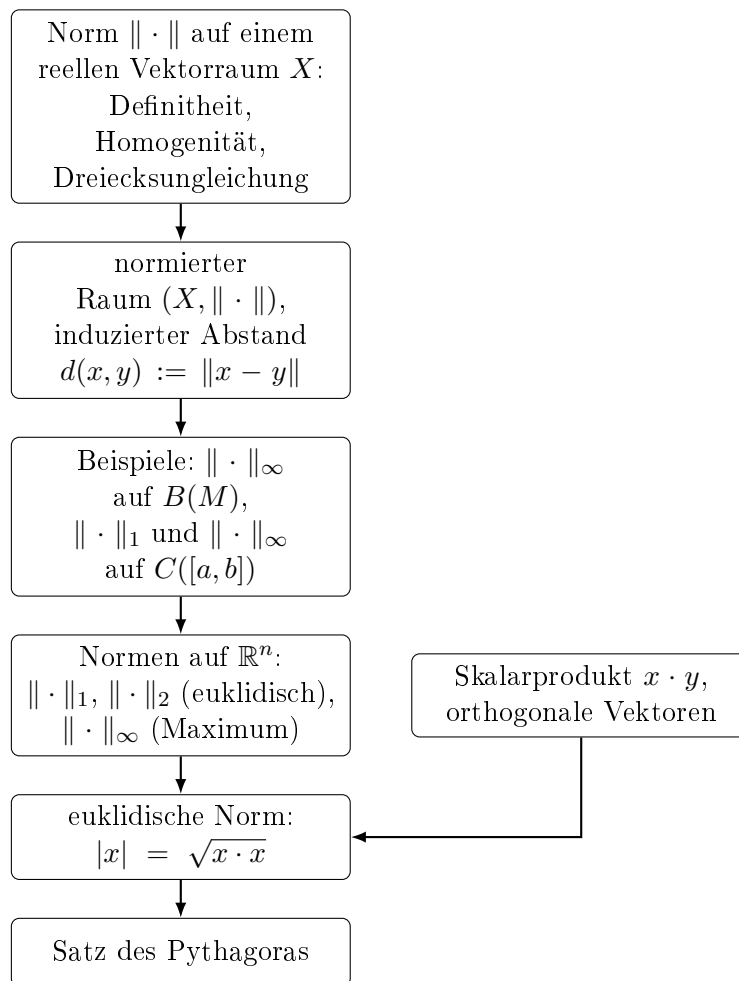
### Selbstkontrollelement 1.3

Sei  $X$  ein reeller Vektorraum und  $\emptyset \neq U \subseteq X$ . Ist Ihnen klar, dass  $U$  genau dann ein Unterraum von  $X$  ist, wenn für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und für alle  $x, y \in U$  der Vektor  $\alpha x + \beta y$  in  $U$  liegt?

## Zielelement 1.4 – $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

---

### Lerninhalte



### Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Begriff des normierten (reellen Vektor-)Raums definieren und an Beispielen, insbesondere am Beispiel  $\mathbb{R}^n$ , erläutern können,
- den von einer Norm induzierten Abstand definieren können,
- das Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm in Zusammenhang bringen und den Satz des Pythagoras formulieren können.

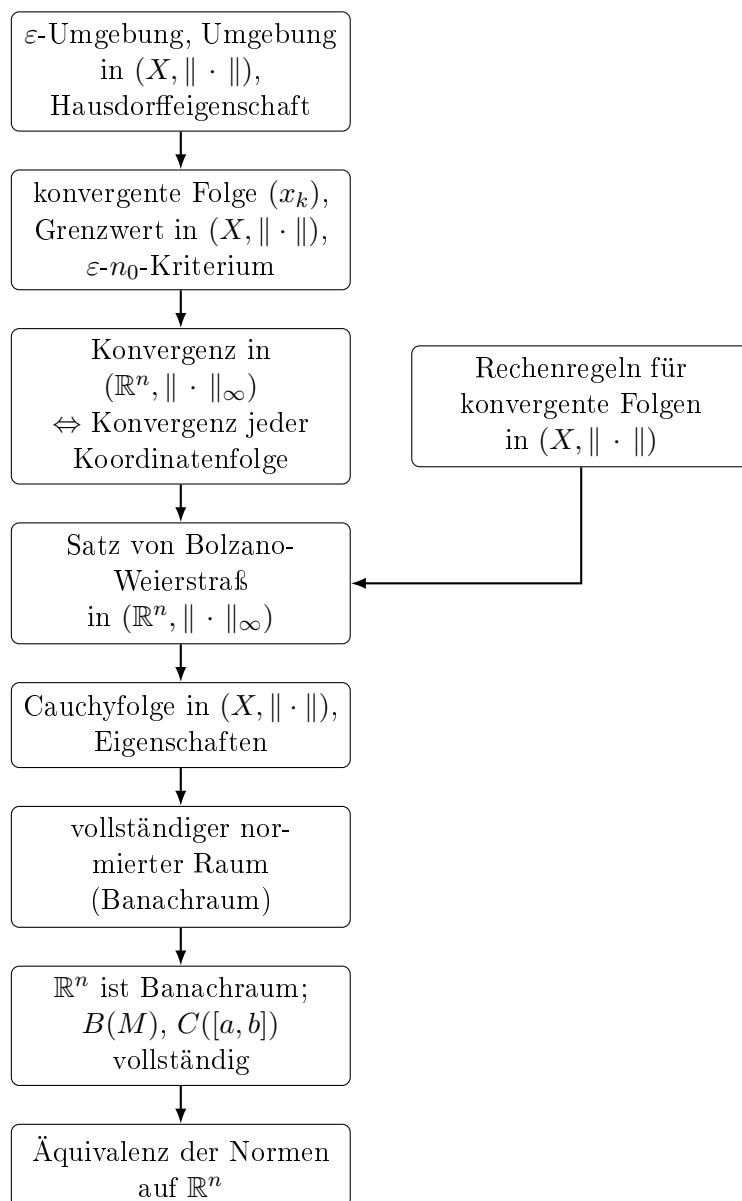
### Selbstkontrollelement 1.4

Sei  $(X, \| \cdot \|)$  ein normierter Raum,  $d$  der von  $\| \cdot \|$  induzierte Abstand. Sehen Sie, dass  $d$  translationsinvariant ist, d. h.  $d(x + a, y + a) = d(x, y)$  für alle  $x, y, a \in X$  gilt?

## Zielelement 1.5 – Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

---

### Lerninhalte



### Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die Begriffe  $\varepsilon$ -Umgebung und Umgebung in einem normierten Raum definieren und ihre wichtigsten Eigenschaften nennen können,
- den Begriff der konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum definieren und an Beispielen erläutern können,
- die Konvergenz von Folgen in  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  durch die Konvergenz der Koordinatenfolgen charakterisieren können,
- den Begriff der Cauchyfolge und den des vollständigen normierten Raumes (Banachraums) definieren und an Beispielen erläutern können,

- $\mathbb{R}^n$  als Beispiel eines Banachraums kennen und wissen, dass alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind.

### **Selbstkontrollelement 1.5**

Sehen Sie, dass eine Folge in  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  mit beliebiger Norm genau dann Cauchyfolge ist, wenn jede der  $n$  Koordinatenfolgen Cauchyfolge in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ist?