Glossar zu Lektion 1

Analysis (Modul 61211)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der ersten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

1.1 Reelle Zahlen (Rückblick und Ergänzungen)

1.1.1 Körpereigenschaften

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein **Körper**: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(i) Kommutativität: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$,

(ii) Assoziativität: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(iii) Distributivität: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Punkt vor Strich),

(iv) Existenz neutraler Elemente 0 und 1 ($0 \neq 1$): $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$,

(v) Existenz inverser Elemente: $\forall\, a\ \exists\, x : a + x = 0$; $\forall\, a \neq 0\ \exists\, y : a \cdot y = 1$.

Die neutralen und inversen Elemente sind eindeutig bestimmt; inverse Elemente heißen $-a$ bzw. $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Subtraktion: $a - b := a + (-b)$; Division: $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

1.1.3 Geordnete Menge

Sei M eine nichtleere Menge mit Relation $\upsilon \subseteq M \times M$. (M, υ) heißt **geordnete Menge**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: (i) $x\,\upsilon\,x$ (Reflexivität), (ii) $x\,\upsilon\,y \wedge y\,\upsilon\,x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie), (iii) $x\,\upsilon\,y \wedge y\,\upsilon\,z \Rightarrow x\,\upsilon\,z$ (Transitivität).
Gilt zusätzlich (iv) $x\,\upsilon\,y \vee y\,\upsilon\,x$, so heißt (M, υ) **linear geordnete Menge**.

1.1.5 Linear geordneter Körper $\mathbb{R}$

Es gibt eine lineare Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$, sodass $(\mathbb{R}, \leq)$ mit den Körperoperationen verträglich ist:

(i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (Verträglichkeit mit der Addition),

(ii) $x \leq y,\ 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$ (Verträglichkeit mit der Multiplikation).

Trichotomie: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $x < y$, $x = y$, $x > y$.

1.1.7 Rechenregeln für Ungleichungen

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; gleichgerichtete Ungleichungen darf man addieren.
- $a < b,\ 0 < c \Rightarrow ac < bc$; Multiplikation mit $c < 0$ kehrt das Zeichen um.
- $0 \leq a \leq b,\ 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.
- $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$; ferner $0 < 1$.

1.1.8 Cauchy-Schwarzsche und Minkowskische Ungleichung

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \;\leq\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \quad \text{(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \;\leq\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \quad \text{(Minkowskische Ungleichung)}$$

1.1.9 Beschränkte Menge

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$. s heißt **obere Schranke** von M, wenn $\forall\, x \in M : x \leq s$. M heißt **nach oben beschränkt**, wenn eine obere Schranke existiert; analog **nach unten beschränkt**. M heißt **beschränkt**, wenn beides gilt.

1.1.10 Supremum, Infimum

$S \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** (kleinste obere Schranke) von $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, wenn S obere Schranke von M ist und $S \leq s$ für jede obere Schranke s gilt. Analog: **Infimum** (größte untere Schranke). Notation: $\sup M$, $\inf M$. Falls $\sup M \in M$: $\max M$; falls $\inf M \in M$: $\min M$.

1.1.12 Existenz des Supremums/Infimums

Zu jeder nichtleeren, nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen existiert das Supremum in $\mathbb{R}$. Analog für das Infimum bei nach unten beschränkten Mengen.

1.1.13 Erweiterte reelle Zahlengerade

$\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$: $\sup M := \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt; $\inf M := -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt.

1.1.14 Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$: $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offen), $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen), $]a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$, $[a, b[:= \{x \mid a \leq x < b\}$ (halboffen). Analog für unbeschränkte Intervalle wie $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$ usw.

1.1.17 Beschränkte Funktion, Supremumnorm

Sei $\emptyset \neq M$. $f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ heißt **beschränkt**, wenn $\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$. Die Zahl $\|f\|_\infty$ heißt **Supremumnorm** von f. Die Menge aller beschränkten Funktionen: $B(M)$.

1.1.18–19 Raum $B(M)$ und Eigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$

$B(M)$ ist abgeschlossen unter Addition, Subtraktion, skalarer Multiplikation und Multiplikation. Die Supremumnorm erfüllt: (i) $\|f\|_\infty \geq 0$, $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (Definitheit), (ii) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\, \|f\|_\infty$ (Homogenität), (iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung), (iv) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

1.1.20 Klassische Schlussweise

Sei $x \in \mathbb{R}$. Gilt $0 \leq x \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so ist $x = 0$.

1.2 Konvergenz (Rückblick und Ergänzungen)

1.2.2 Betrag

$|x| := x$ falls $x \geq 0$, $|x| := -x$ falls $x < 0$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$: (i) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (ii) $|xy| = |x||y|$, (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung), (iv) $|x| - |y| \leq |x + y|$ (zweite Dreiecksungleichung), (v) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$.

1.2.3 Abstand

$d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Eigenschaften: Definitheit, Symmetrie, Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.2.4 ε-Umgebung, Umgebung

Für $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ heißt **ε-Umgebung** von a. $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Umgebung** von a, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

1.2.5 Eigenschaften von Umgebungen

Sei U eine Umgebung von $a \in \mathbb{R}$. Dann: (i) $a \in U$, (ii) jede Obermenge von U ist Umgebung von a, (iii) der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von a ist Umgebung von a.

1.2.6 Hausdorffeigenschaft

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$.

1.2.1 Folge

Eine **Folge** in $M \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Schreibweise: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oder (a_k) mit Gliedern $a_k := f(k)$. Im Fall $M = \mathbb{R}$: **reelle Folge**.

1.2.7–8 Konvergente Folge, Grenzwert

(a_k) heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder liegen („fast alle" = alle bis auf endlich viele). Der Grenzwert ist eindeutig und wird mit $\lim_{k\to\infty} a_k$ oder $\lim f$ bezeichnet. Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

1.2.10 Raum c konvergenter Folgen

Konvergente Folgen sind beschränkt: $c \subseteq \ell^\infty := B(\mathbb{N})$. Rechenregeln: Für $(a_k), (b_k) \in c$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $(a_k) \pm (b_k), \alpha(a_k), (a_k)(b_k) \in c$ mit den erwarteten Grenzwertregeln. Ferner: Ist $\lim a_k = 0$ und (c_k) beschränkt, so $\lim a_k c_k = 0$. Sandwich-Theorem: Gilt $a_k \leq c_k \leq b_k$ (f.a.) und $\lim a_k = \lim b_k$, so $\lim c_k = \lim a_k$.

1.2.12 Teilfolge

$(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge** von (a_k), wenn (k_j) streng monoton wachsend in $\mathbb{N}$ ist. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Grenzwert.

1.2.13 Divergenzkriterium

Besitzt (a_k) eine divergente Teilfolge oder zwei konvergente Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, so ist (a_k) divergent.

1.2.14 ε-n_0-Kriterium

$\lim_{k\to\infty} a_k = a \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq n_0 : |a_k - a| < \varepsilon.$

1.2.15–16 Monotone Folge, Monotoniekriterium

(a_k) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_k \leq a_{k+1}$ für alle k; **monoton fallend**, wenn $a_k \geq a_{k+1}$ für alle k. **Monotoniekriterium:** Eine monotone beschränkte Folge ist konvergent.

1.2.17 Monotone Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß

(i) Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.
(ii) **Satz von Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

1.2.18–19 Cauchyfolge

(a_k) heißt **Cauchyfolge**, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall k, \ell \geq n_0 : |a_k - a_\ell| < \varepsilon$.

1.2.20 Eigenschaften von Cauchyfolgen

(i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. (ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt. (iii) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.

1.2.21 Cauchykriterium

Jede reelle Cauchyfolge ist konvergent. Damit gilt: Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

1.2.23–24 Bestimmt divergente Folgen

$U \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ heißt **Umgebung von** ∞, wenn $\infty \in U$ und $]\alpha, \infty[\, \subseteq U$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$; analog für $-\infty$. (a_k) heißt **bestimmt divergent gegen** $a = \infty$ (bzw. $-\infty$), wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder liegen. ε-n_0-Kriterium: $\lim a_k = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : k \geq n_0 \Rightarrow a_k > \frac{1}{\varepsilon}$.

1.3 $\mathbb{R}^n$ als reeller Vektorraum

1.3.1 Die Menge $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n \right\}$ heißt n**-dimensionaler reeller Raum**.

x_k heißt k**-te Koordinate**. Standardbasisvektoren: e_k mit $(e_k)_k = 1$, sonst 0. Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig als $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ schreiben.

1.3.2 Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Nullvektor: $0 = (0, \ldots, 0)^T$; entgegengesetzter Vektor: $-a = (-a_1, \ldots, -a_n)^T$.

1.3.3 Reeller Vektorraum

Sei X eine nichtleere Menge mit Addition und skalarer Multiplikation (über $\mathbb{R}$). X heißt **reeller Vektorraum**, wenn die Axiome (Add_1)–(Add_4) und (Mult_1)–(Mult_3) erfüllt sind:

- (Add_1) Assoziativität der Addition,
- (Add_2) Existenz eines Nullvektors $0 \in X$,
- (Add_3) Existenz inverser Elemente $-x$ für jedes $x \in X$,
- (Add_4) Kommutativität der Addition,
- (Mult_1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- (Mult_2) Distributivgesetze: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- (Mult_3) $1 \cdot x = x$.

$\mathbb{R}^n$ ist mit obiger Addition und skalarer Multiplikation ein reeller Vektorraum.

1.3.4 Weitere Beispiele reeller Vektorräume

- $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$, $B(M)$ (beschränkte Funktionen), $\ell^\infty = B(\mathbb{N})$,
- $C(M)$ (stetige Funktionen), $C^1(M)$ (stetig differenzierbar),
- $\mathcal{R}(I)$ (Riemann-integrierbare Funktionen auf abgeschlossenem Intervall I),
- P_n (Polynome vom Grad $\leq n$), P (alle Polynome),
- c (konvergente Folgen), c_0 (Nullfolgen), $\omega = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1.4 $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

1.4.1 Norm, normierter Raum

Eine Funktion $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum X heißt **Norm** auf X, und $(X, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**, falls:

(i) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (Definitheit),

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (positive Homogenität),

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Ferner gilt die zweite Dreiecksungleichung: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|$.

1.4.2 Induzierter Abstand

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Durch $d(x, y) := \|x - y\|$ wird der **von der Norm induzierte Abstand** definiert. Er ist Definitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung (vgl. 1.2.3).

1.4.3 Beispiele normierter Räume

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: Betragsfunktion als Norm.
- $(B(M), \|\cdot\|_\infty)$: Supremumnorm.
- $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$: $\|(a_k)\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$.

- $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ und $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ mit $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$.

1.4.4 Normen auf $\mathbb{R}^n$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $p = 1$ oder $p = 2$:

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

$\|\cdot\|_2$ heißt **euklidische Norm** (Schreibweise auch $|x|$); $\|\cdot\|_\infty$ heißt **Maximumnorm**. Die induzierten Abstände: d_1, d_2 (euklidisch), d_∞.

1.4.5 Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ heißt **Skalarprodukt** (inneres Produkt). x und y heißen **orthogonal**, wenn $x \cdot y = 0$. Eigenschaften: Bilinearität, Kommutativität $x \cdot y = y \cdot x$, positive Definitheit $x \cdot x \ge 0$ und $(x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0)$. Es gilt $|x| = \|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

1.4.7 Satz des Pythagoras

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal $(x \cdot y = 0)$, so gilt:

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

1.5 Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

1.5.1 ε-Umgebung, Umgebung in $(X, \|\cdot\|)$

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $a \in X$, $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$$

heißt ε-**Umgebung** von a. $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von a, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

1.5.2–3 Eigenschaften von Umgebungen, Hausdorffeigenschaft

In einem normierten Raum gelten die analogen Eigenschaften wie in 1.2.5 und 1.2.6: (i) $a \in U$, (ii) jede Obermenge einer Umgebung von a ist Umgebung von a, (iii) endliche Durchschnitte von Umgebungen von a sind Umgebungen von a. **Hausdorffeigenschaft:** Für $a \ne b$ gibt es disjunkte Umgebungen U von a und V von b.

1.5.4–5 Konvergente Folge, Grenzwert in $(X, \|\cdot\|)$

(x_k) heißt **konvergent gegen** a in $(X, \|\cdot\|)$ (Schreibweise $x_k \to a$), wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder liegen. Der Grenzwert ist eindeutig: $\lim_{k\to\infty} x_k$. Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

1.5.6 ε-n_0-Kriterium in $(X, \|\cdot\|)$

(x_k) konvergiert gegen a in $(X, \|\cdot\|)$ genau dann, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \ge n_0 :$ $\|x_k - a\| < \varepsilon$, d. h. $\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$ (im gewöhnlichen Sinne in $\mathbb{R}$).

1.5.8 Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Für $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})^T \in \mathbb{R}^n$ und $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$ gilt:

$$x_k \to a \text{ in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \iff \lim_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu \text{ für alle } \nu = 1, \ldots, n.$$

Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ bedeutet also komponentenweise Konvergenz.

1.5.9 Satz von Bolzano-Weierstraß in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Jede $\|\cdot\|_\infty$-beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ konvergente Teilfolge.

1.5.10 Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind vergleichbar

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm. Dann existieren $\alpha, \beta > 0$ mit $\|x\| \leq \alpha\|x\|_\infty$ und $\|x\|_\infty \leq \beta\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

1.5.11 Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$

Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent: (i) U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \Leftrightarrow U$ ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$. (ii) (x_k) konvergiert (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \Leftrightarrow (x_k)$ konvergiert (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*) \Leftrightarrow$ jede Koordinatenfolge konvergiert im gewöhnlichen Sinne.

1.5.13 Rechenregeln für konvergente Folgen in $(X, \|\cdot\|)$

Seien $(x_k) \to a$ und $(y_k) \to b$ in $(X, \|\cdot\|)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann: (i) $(x_k) + (y_k) \to a + b$, (ii) $\alpha(x_k) \to \alpha a$.

1.5.14 Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|)$

(x_k) heißt **Cauchyfolge** in $(X, \|\cdot\|)$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k > n_0 : \|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon$.

1.5.15 Eigenschaften von Cauchyfolgen in $(X, \|\cdot\|)$

(i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. (ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt. (iii) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.

1.5.17 Vollständiger normierter Raum, Banachraum

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, in welchem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt **vollständig** oder **Banachraum**.

1.5.18–19 $\mathbb{R}^n$ als Banachraum; weitere Beispiele

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist für jede Norm $\|\cdot\|$ ein Banachraum.
Weitere Banachräume: $(B(M), \|\cdot\|_\infty)$ und $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.
Nicht vollständig: $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$.