Einsendeaufgaben – Aufgabe 1.4

61211 Analysis

Aufgabe 1.4

(i) $\underline{1.\ \forall f \in X : \|f\|_X \geq 0}$

Für alle $x \in [0,1]$ gilt
$$(1 + xe^x)|f(x)| \geq 0.$$
Demnach gilt
$$\|f\|_X = \int_0^1 (1 + xe^x)|f(x)|\,dx \geq 0.$$

$\underline{2.\ \forall f \in X : \|f\|_X = 0 \Longleftrightarrow f = \hat{0}}$

„$\Rightarrow$"-Richtung:

Sei $\|f\|_X = 0$. Da $g(x) = (1 + xe^x)|f(x)|$ stetig ist und das Riemann-Integral
$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0$$
ist, muss $f = \hat{0}$ sein. Für nicht stetige Funktionen gilt dies nicht allgemein.

„$\Leftarrow$"-Richtung:

Sei $f = \hat{0}$. Dann gilt direkt
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (1 + xe^x) \cdot 0\,dx \\ &= \int_0^1 (1 + xe^x)|f(x)|\,dx \\ &= \|f\|_X \end{aligned}$$

(ii) $\forall f \in X\ \forall a \in \mathbb{R} : \|af\|_X = |a|\,\|f\|_X$
$$\begin{aligned} \|af\|_X &= \int_0^1 (1 + xe^x)|af(x)|\,dx \\ &= |a| \int_0^1 (1 + xe^x)|f(x)|\,dx \\ &= |a|\,\|f\|_X \end{aligned}$$

(iii) $\forall f, g \in X : \|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_X &= \int_0^1 (1+xe^x)|f(x)+g(x)|\,dx \\
&\leq \int_0^1 (1+xe^x)(|f(x)|+|g(x)|)\,dx \quad (\text{da } (1+xe^x) \geq 0) \\
&= \int_0^1 (1+xe^x)|f(x)|\,dx + \int_0^1 (1+xe^x)|g(x)|\,dx \\
&= \|f\|_X + \|g\|_X
\end{aligned}$$