# Einsendeaufgaben – Aufgabe 1.3

61211 Analysis

## Aufgabe 1.3

a) (i) $\underline{1.\ \forall x \in X : \|(x_n)\|_\infty \geq 0}$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \geq 0,$$

da $|x_n| \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\underline{2.\ \forall x \in X : \|(x_n)\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow x_n = 0}$

„$\Rightarrow$“-Richtung:

Sei $\|(x_n)\|_\infty = 0$. Wegen $\|(x_n)\|_\infty \geq 0$ und $\sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ folgt $x_n = 0$.

„$\Leftarrow$“-Richtung:

Sei $x_n = 0$. Daraus folgt direkt $\|(x_n)\| = 0$.

(ii) $\forall x \in X\ \forall a \in \mathbb{R} : \|ax\|_\infty = |a|\,\|x\|$

$$\begin{aligned}\|(ax_n)\|_\infty &= \sup\{|ax_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= |a| \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= |a|\,\|(x_n)\|_\infty\end{aligned}$$

(iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \|(x_n) + (y_n)\|_\infty\\ &= \sup\{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &\leq \sup\{|x_n| + |y_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &\leq \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= \|(x_n)\|_\infty + \|(y_n)\|_\infty\end{aligned}$$

b) Sei $(f_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|_\infty)$. Wir definieren $f_k(j)$ als $j$-tes Folgenglied von $f_k$. Wir zeigen nun, dass $(f_k(j))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Sei $j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_k)$ eine Cauchyfolge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned}|f_k(j) - f_{n_0}(j)| &\leq \sup\{|f_k(n) - f_{n_0}(n)| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= \|f_k - f_{n_0}\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $k > n_0$.

Also ist $(f_k(j))$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Da jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert $(f_k(j))$. Wir definieren die Folge $f$ mit

$$f_n := \lim_{k\to\infty} f_k(n), \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Noch zu zeigen, dass $f \in X$ und $f_k \to f$ in $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

<u>(i) $f \in X$</u>

Wir zeigen, dass $f$ eine Nullfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $(f_k)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall k \in \mathbb{N} : (k > n_0) \Rightarrow \|f_k - f_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da $f_{n_0} \in X$, ist $f_{n_0}$ eine Nullfolge. Demnach existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall j \in \mathbb{N} : (j \geq j_0) \Rightarrow |f_{n_0}(j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir wählen dieses $j_0$ aus und zeigen

$$\forall j \in \mathbb{N} : (j \geq j_0) \Rightarrow |f(j)| < \varepsilon.$$

Sei $j \geq j_0$. Da $f_k(j) \to f(j)$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : (k \geq k_0) \Rightarrow |f_k(j) - f(j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir definieren $k_1 := \max\{n_0 + 1, k_0\}$. Damit können wir nun schlussfolgern:

$$\begin{aligned}
|f(j)| &= |f(j) - f_{k_1}(j) + f_{k_1}(j)| \\
&\leq |f(j) - f_{k_1}(j)| + |f_{k_1}(j)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_1}(j)| \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_1}(j) - f_{n_0}(j) + f_{n_0}(j)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_1}(j) - f_{n_0}(j)| + |f_{n_0}(j)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_1}(j) - f_{n_0}(j)| + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Da $|f_{k_1}(j) - f_{n_0}(j)| \leq \|f_{k_1} - f_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ wegen $k_1 > n_0$, folgt

$$\begin{aligned}
|f(j)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{k_1}(j) - f_{n_0}(j)| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$f$ ist also eine Nullfolge und demnach ist $f \in X$.

<u>(ii) $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ mit $k \to \infty$</u>

Nach Beispiel 1.5.19(i) ist $(\mathcal{B}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Da jede Nullfolge beschränkt ist, gilt $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})$. In (i) haben wir schon gezeigt, dass $f \in X$, also auch $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Jedes Folgenglied $f_k$ ist nach Definition von $X$ ebenfalls eine Nullfolge, also beschränkt. Nach 1.5.19(i) gilt dann

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0.$$

c) $\|(x_n)\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ gilt, da:

Fall 1: $\|(x_n)\|_\infty = 0$

Dann muss $(x_n)$ eine konstante Folge $x_n = 0$ sein. Demnach gilt

$$\|(x_n)\|_\infty = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Fall 2: $\|(x_n)\|_\infty > 0$

Es muss ein $k \in \mathbb{N}$ existieren mit:

$$|x_k| = \sup\{|x_n| : \forall n \in \mathbb{N}\} = \|(x_n)\|_\infty.$$

Denn sonst müsste es eine Teilfolge $(x_{n_j})$ geben mit $|x_{n_j}| \to \sup\{|x_n| : \forall n \in \mathbb{N}\}$. Dies kann aber nicht sein, da $(x_n)$ eine Nullfolge ist. Demnach gilt

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : \forall n \in \mathbb{N}\} = |x_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Gilt auch für den Fall $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty$, da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x < \infty$ definiert ist.