

Einsendeaufgaben – Aufgabe 1.2

61211 Analysis

Aufgabe 1.2

a) (i) 1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0$

$$\begin{aligned}\|x\| &= |x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| \\ &\geq \left| x_1 + \sum_{j=2}^n x_j - x_{j-1} \right| \\ &\geq 0\end{aligned}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \iff x = 0$

„ \Rightarrow “-Richtung:

Sei $\|x\| = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 2$

Da $|x_1| + |x_2 - x_1| = 0$ gilt, muss $x_1 = 0$ und damit $|x_2 - x_1| = |x_2| = 0$ sein.

Also $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Nach der Induktionsvoraussetzung $x_k = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned}\|x\| &= |x_1| + \sum_{j=2}^{n+1} |x_j - x_{j-1}| \\ &= |x_{n+1}|\end{aligned}$$

Da $\|x\| = 0$ gilt, muss $x_{n+1} = 0$ sein. Also $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$.

„ \Leftarrow “-Richtung:

Sei $x = 0$. Daraus folgt direkt

$$\|x\| = |x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| = 0.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall a \in \mathbb{R} : \|ax\| = |a| \|x\|$

$$\begin{aligned} \|ax\| &= |ax_1| + \sum_{j=2}^n |ax_j - ax_{j-1}| \\ &= |a| |x_1| + \sum_{j=2}^n |a| |x_j - x_{j-1}| \\ &= |a| \left(|x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| \right) \\ &= |a| \|x\| \end{aligned}$$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + \sum_{j=2}^n |(x_j + y_j) - (x_{j-1} + y_{j-1})| \\ &= |x_1 + y_1| + \sum_{j=2}^n |(x_j - x_{j-1}) + (y_j - y_{j-1})| \\ &\leq |x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| + |y_1| + \sum_{j=2}^n |y_j - y_{j-1}| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

b) Wir setzen $\gamma = \frac{1}{n}$. Wir definieren $x_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Fall 1: $m = 1, x_m = x_1$

$$\begin{aligned} \|x\| &= |x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| \\ &\geq |x_1| \\ &= \frac{1}{n} |n \cdot x_1| \\ &\geq \frac{1}{n} \sqrt{n x_1^2} \\ &\geq \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \\ &= \gamma \|x\|_2 \end{aligned}$$

Fall 2: $2 \leq m \leq n, x_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Es gilt

$$\begin{aligned} |x_1| + \sum_{j=2}^m |x_j - x_{j-1}| &= |x_m - x_{m-1}| + \dots + |x_2 - x_1| + |x_1| \\ &\geq |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots - x_2 + x_2 - x_1| + |x_1| \\ &= |x_m - x_1| + |x_1| \\ &\geq |x_m| \end{aligned}$$

Mit $|x_1| + \sum_{j=2}^m |x_j - x_{j-1}| \geq |x_m|$ können wir nun zeigen:

$$\begin{aligned}\|x\| &= |x_1| + \sum_{j=2}^n |x_j - x_{j-1}| \\ &\geq |x_1| + \sum_{j=2}^m |x_j - x_{j-1}| \\ &\geq |x_m| \\ &\geq \frac{1}{n} \sqrt{n x_m^2} \\ &\geq \gamma \|x\|_2\end{aligned}$$