

Einsendeaufgaben – Aufgabe 1.1

61211 Analysis

Aufgabe 1

a) (i) 1. $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \geq 0$

Da $\|\cdot\|_2$ und $|\cdot|$ Normen sind, gilt

$$\|(x_1, x_3)\|_2 \geq 0 \quad \text{und} \quad |x_2| \geq 0.$$

Also

$$\|x\| = \|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2| \geq 0.$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 0 \iff x = 0$

„ \Rightarrow “-Richtung:

Sei $\|x\| = 0$. Dann gilt

$$\|x\| = \|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2| = 0.$$

Da $\|(x_1, x_3)\|_2 \geq 0$ und $|x_2| \geq 0$, folgt

$$\|(x_1, x_3)\|_2 = 0 \quad \text{und} \quad |x_2| = 0.$$

Da $\|\cdot\|_2$ und $|\cdot|$ Normen sind, folgt $(x_1, x_3) = 0$ und $x_2 = 0$, also $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$.

„ \Leftarrow “-Richtung:

Sei $x = 0$. Da $\|\cdot\|_2$ und $|\cdot|$ Normen sind, folgt $\|(x_1, x_3)\|_2 = 0$ und $|x_2| = 0$.

Demnach gilt

$$0 = \|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2| = \|(x_1, x_2, x_3)\|.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^3 \forall a \in \mathbb{R} : \|ax\| = |a| \|x\|$

$$\begin{aligned} \|ax\| &= \|(ax_1, ax_3)\|_2 + |ax_2| \\ &= \|a(x_1, x_3)\|_2 + |ax_2| \\ &= |a| \|(x_1, x_3)\|_2 + |a| |x_2| \\ &= |a| (\|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2|) \\ &= |a| \|x\| \end{aligned}$$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, x_3 + y_3)\|_2 + |x_2 + y_2| \\ &\leq (\|(x_1, x_3)\|_2 + \|(y_1, y_3)\|_2) + (|x_2| + |y_2|) \\ &= (\|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2|) + (\|(y_1, y_3)\|_2 + |y_2|) \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

b) (i) Es gilt $\sqrt{x_1^2 + x_3^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $|x_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, da:

$$1. \sqrt{x_1^2 + x_3^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\iff x_1^2 + x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \iff 0 \leq x_2^2$$

$$2. |x_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\iff x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \iff 0 \leq x_1^2 + x_3^2$$

Wir wählen $c_1 = 2$ und daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, x_3)\| &= \|(x_1, x_3)\|_2 + |x_2| \\ &\leq \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 + \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \\ &= 2 \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \end{aligned}$$

(ii) Wir setzen $c_2 = 3$.

Es gilt $\sqrt{x_1^2 + x_3^2} \leq 2 \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty$ und $|x_2| \leq \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty$, da:

1.

$$x_1^2 + x_3^2 \leq 2 \max\{x_1^2, x_3^2\} \leq 2 \max\{x_1^2, x_2^2, x_3^2\} = 2 \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty^2$$

Demnach gilt $\sqrt{x_1^2 + x_3^2} \leq 2 \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty$.

2.

$$|x_2| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, x_3)\| &= \sqrt{x_1^2 + x_3^2} + |x_2| \\ &\leq 2 \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty + \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty \\ &= 3 \|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty \end{aligned}$$