

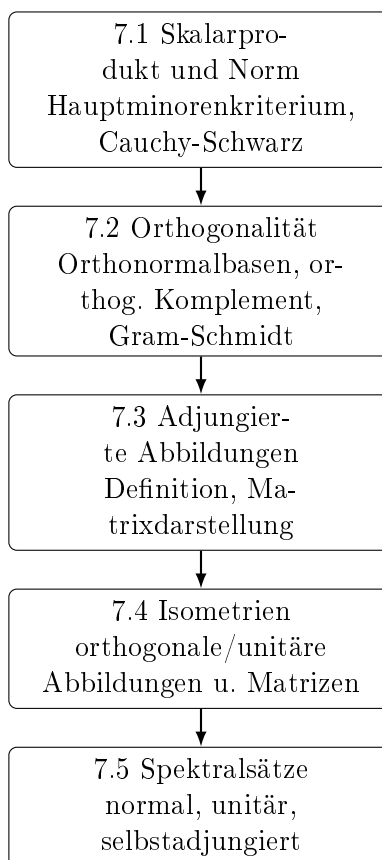
Studierhinweise zu Lektion 7

Lineare Algebra (Modul 61112)

Die letzte Lektion behandelt **Euklidische und unitäre Vektorräume** – reelle bzw. komplexe Vektorräume mit einem **Skalarprodukt**. Damit wird Geometrie möglich: Abstände, Winkel, Orthogonalität. Höhepunkt sind die **Spektralsätze**, die Aussagen über Diagonalisierbarkeit bestimmter Endomorphismen mit Orthonormalbasis aus Eigenvektoren machen.

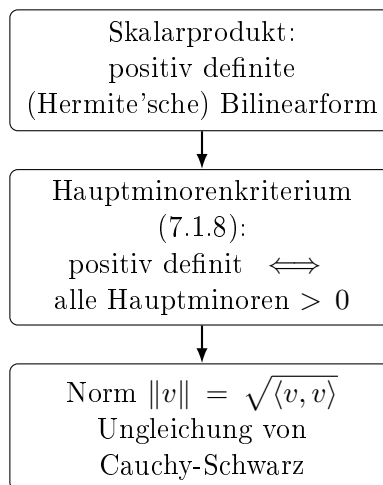
Diese Lektion baut auf Lektion 3 (Bilinearformen, Hermite'sche Formen) auf. Sie ist etwas einfacher als Lektion 6, enthält aber viele schöne und nützliche Begriffe.

Struktur der Lektion 7



Zielelement 7.1 – Skalarprodukt und Norm

Lerninhalte



Lernziele

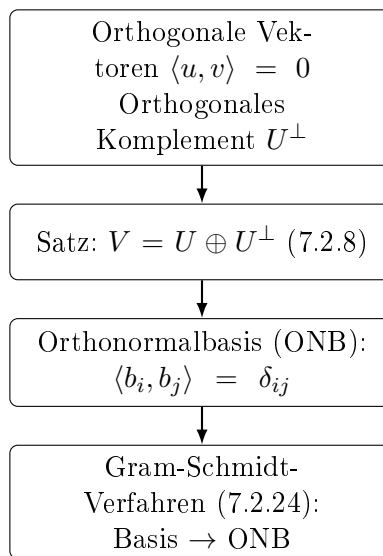
- Ein Skalarprodukt als positiv definite (Hermite'sche) Bilinearform erkennen.
- Das Hauptminorenkriterium zur Prüfung positiver Definitheit anwenden.
- Die Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ berechnen und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz (7.1.15) anwenden.

Selbstkontrollelement 7.1

Ist $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ? Prüfen Sie mit dem Hauptminorenkriterium.

Zielelement 7.2 – Orthogonalität und Gram-Schmidt

Lerninhalte



Lernziele

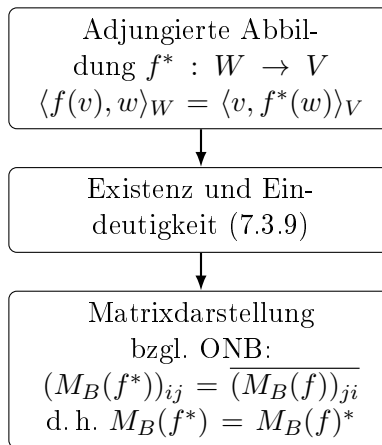
- Das orthogonale Komplement U^\perp berechnen; den Zerlegungssatz $V = U \oplus U^\perp$ anwenden.
- Orthonormalbasen definieren und Koordinaten über das Skalarprodukt berechnen (7.2.20).
- Das Gram-Schmidt-Verfahren (7.2.24) anwenden, um eine Basis in eine ONB umzuwandeln.

Selbstkontrollelement 7.2

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Basis $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ in \mathbb{R}^3 mit Standardskalarprodukt durch.

Zielelement 7.3 – Adjungierte Abbildungen

Lerninhalte



Lernziele

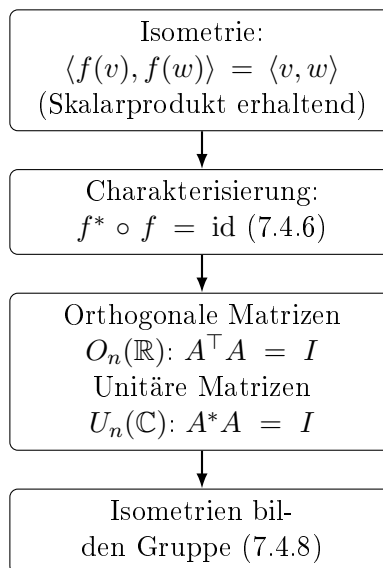
- Die adjungierte Abbildung f^* definieren und ihren Existenz- und Eindeutigkeitssatz kennen.
- Die Matrixdarstellung von f^* bzgl. einer ONB als $M_B(f^*) = \overline{M_B(f)}^\top$ berechnen.
- Den Zusammenhang zwischen dualer und adjungierter Abbildung verstehen (7.3.14).

Selbstkontrollelement 7.3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (bzgl. ONB). Bestimmen Sie $M_B(f^*)$.

Zielelement 7.4 – Isometrien

Lerninhalte



Lernziele

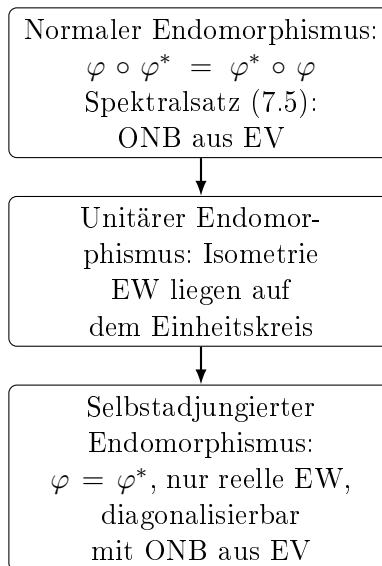
- Isometrien als abstands- (bzw. skalarprodukt-)erhaltende Abbildungen definieren.
- Das Kriterium $f^* \circ f = \text{id}$ für Isometrien (7.4.6) anwenden.
- Orthogonale und unitäre Matrizen definieren; konkrete Matrizen überprüfen.

Selbstkontrollelement 7.4

Zeigen Sie, dass die Drehmatrix $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Zielelement 7.5 – Spektralsätze

Lerninhalte



Lernziele

- Normale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen definieren.
- Den allgemeinen Spektralsatz für normale Endomorphismen kennen.
- Den Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen anwenden: nur reelle Eigenwerte, ONB aus Eigenvektoren.
- Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für selbstadjungierte Endomorphismen berechnen.

Selbstkontrollelement 7.5

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ist A selbstadjungiert? Bestimmen Sie eine ONB aus Eigenvektoren.