

Glossar zu Lektion 7

Lineare Algebra (Modul 61112)

7.1 Skalarprodukt und Norm

7.1.1 Skalarprodukt

Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Auf einem komplexen Vektorraum ist es eine positiv definite Hermite'sche Form. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **Euklidisch** (reell) bzw. **unitär** (komplex).

Standardskalarprodukt

Auf \mathbb{R}^n : $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Auf \mathbb{C}^n : $\langle x, y \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i$.

7.1.8 Hauptminorenkriterium

Eine symmetrische (bzw. Hermite'sche) Matrix A ist positiv definit \iff alle Hauptminoren $\det(A_k) > 0$ (mit $A_k =$ obere linke $k \times k$ -Teilmatrix).

7.1.11 Norm

$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Eigenschaften: $\|v\| \geq 0$; $\|v\| = 0 \iff v = 0$; $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$; Dreiecksungleichung.

7.1.15 Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Gleichheit gilt $\iff u$ und v sind linear abhängig.

7.2 Orthogonalität

7.2.3 Orthogonalität

$u, v \in V$ heißen **orthogonal** ($u \perp v$), wenn $\langle u, v \rangle = 0$.

7.2.7 Orthogonales Komplement

$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U\}$ ist ein Unterraum.

7.2.8 Satz

$V = U \oplus U^\perp$ für jeden Unterraum U eines endlich-dimensionalen Euklidischen/unitären VR. Insbesondere: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

7.2.16 Orthonormalbasis (ONB)

Eine Basis (b_1, \dots, b_n) heißt **Orthonormalbasis**, wenn $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$.

7.2.20 Koordinatenformel für ONB

Bzgl. einer ONB (b_1, \dots, b_n) gilt: $v = \sum_i \langle v, b_i \rangle b_i$.

7.2.24/25 Gram-Schmidt-Verfahren

Aus einer Basis (v_1, \dots, v_n) wird eine ONB konstruiert:

$$b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad b_k := \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, b_i \rangle b_i}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, b_i \rangle b_i \right\|}.$$

7.3 Adjungierte Abbildungen

7.3.1 Adjungierte Abbildung

Zu $f : V \rightarrow W$ (linear) ist die **adjungierte Abbildung** $f^* : W \rightarrow V$ die eindeutige lineare Abbildung mit $\langle f(v), w \rangle_W = \langle v, f^*(w) \rangle_V$ für alle $v \in V, w \in W$.

7.3.9 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)

Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen Euklidischen/unitären VR existiert eine eindeutige adjungierte Abbildung f^* .

7.3.11 Matrixdarstellung

Bzgl. ONBs B, C : $M_C(f^*) = M_B(f)^*$ (konjugiert transponiert). Im reellen Fall: $M(f^*) = M(f)^\top$.

7.4 Isometrien

7.4.1 Isometrie

$f : V \rightarrow W$ heißt **Isometrie**, wenn $\langle f(v), f(w) \rangle_W = \langle v, w \rangle_V$ für alle $v, w \in V$.

7.4.2 Satz

Isometrien erhalten Normen und damit Abstände: $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$.

7.4.6 Satz (Charakterisierung)

$f \in \text{End}(V)$ ist Isometrie $\iff f^* \circ f = \text{id}_V$.

7.4 Orthogonale / Unitäre Matrix

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn $A^\top A = I_n$ (äquivalent: Spalten bilden ONB).
 $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt **unitär**, wenn $A^* A = I_n$.

7.4.8 Satz

Die Isometrien von V bilden eine Gruppe unter Komposition. Im endlich-dimensionalen Fall ist diese isomorph zur orthogonalen Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ bzw. zur unitären Gruppe $U_n(\mathbb{C})$.

7.5 Spektralsätze

7.5 Normaler Endomorphismus

$\varphi \in \text{End}(V)$ heißt **normal**, wenn $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

7.5 (Spektralsatz, allg.) Spektralsatz für normale Endomorphismen

Sei V ein unitärer VR und φ normal. Dann besitzt V eine ONB aus Eigenvektoren von φ . (Die Eigenräume stehen paarweise orthogonal aufeinander.)

7.5 (unitär) Spektralsatz für unitäre Endomorphismen

Unitäre Endomorphismen sind normal. Ihre Eigenwerte haben Betrag 1 ($|\lambda| = 1$).

7.5 (selbstadj.) Selbstadjungiert und Spektralsatz

φ heißt **selbstadjungiert**, wenn $\varphi = \varphi^*$. (Matrixdarstellung bzgl. ONB: $A = A^*$,

d.h. A ist Hermitesch; im reellen Fall $A = A^\top$.) **Spektralsatz:** Selbstadjungierte Endomorphismen haben nur reelle Eigenwerte und sind normal, besitzen also eine ONB aus Eigenvektoren.