Studierhinweise zu Lektion 6

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion löst das **Normalformproblem**: Jede komplexe quadratische Matrix ist ähnlich zu einer Matrix in **Jordan'scher Normalform**. Der Weg führt über **nilpotente Endomorphismen** (deren Normalformtheorie der schwierigste Schritt ist) und **Haupträume**.

Dies ist die anspruchsvollste Lektion des Moduls – bleiben Sie am Ball. Bevor Sie sich mit der allgemeinen Jordan-Form beschäftigen, sollten Sie zunächst die nilpotente Normalform gründlich verstehen.

Struktur der Lektion 6

6.1 Invariante Unterräume
$U_\varphi(g) = \ker(g(\varphi))$,
Zerlegung durch Minimalpolynom

↓

6.2 Nilpotente Endomorphismen
Stufen, Filtrierung, zyklische UR, Rangpartition, Normalform

↓

6.3 Jordan'sche Normalform
Jordanblöcke, Haupträume, Hauptsatz, Berechnung

Zielelement 6.1 – Invariante Unterräume und Minimalpolynom

Lerninhalte

$U_\varphi(g) = \ker(g(\varphi))$ φ-invarianter Unterraum (6.1.1)

Satz 6.1.8: Für teilerfremde g_1, g_2: $U_\varphi(g_1 g_2) = U_\varphi(g_1) \oplus U_\varphi(g_2)$

Kriterium: φ diagonal $\iff$ μ_φ zerfällt in versch. Linearfaktoren (Satz 6.1.11)

Lernziele

- Den Unterraum $U_\varphi(g) = \ker(g(\varphi))$ berechnen; Invarianz nachweisen.
- Satz 6.1.8 anwenden: Faktorisierung des Minimalpolynoms liefert Zerlegung in invariante Unterräume.
- Das Kriterium 6.1.11 für Diagonalisierbarkeit über das Minimalpolynom anwenden.

Selbstkontrollelement 6.1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie μ_A und zerlegen Sie $\mathbb{R}^2 = U_A(X-2) \oplus U_A(X-3)$.

Zielelement 6.2 – Nilpotente Endomorphismen

Lerninhalte

Nilpotent: $\varphi^k = 0$
Charakterisierung
(6.2.17/18)

$\downarrow$

Stufe eines Vektors (6.2.7)
Filtrierung $\ker(\varphi^k)$

$\downarrow$

Zyklischer Unterraum $Z(v, \varphi)$
Basis: $v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v)$

$\downarrow$

Partition, duale Partition (6.2.27–6.2.40)
Rangpartition $p(\varphi)$

$\downarrow$

Nilpotente Normalform (6.2.49/51)
Satz: eindeutig
durch Rangpartition

Lernziele

- Nilpotente Endomorphismen definieren; Kriterien 6.2.17/18 kennen.
- Die Filtrierung $\{0\} \subsetneq \ker(\varphi) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \cdots$ verstehen.
- Zyklische Unterräume definieren und eine Basis angeben.
- Den Begriff der Partition und der dualen Partition erklären.
- Die Rangpartition $p(\varphi)$ berechnen; die nilpotente Normalform bestimmen.
- Zwei nilpotente Matrizen sind ähnlich $\iff$ gleiche Rangpartition (6.2.54).

Selbstkontrollelement 6.2

Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Rangpartition und die nilpotente Normalform.

Zielelement 6.3 – Jordan'sche Normalform

Lerninhalte

Jordanblock
$J_k(\lambda)$ der Größe k
Jordankästchen

↓

Jordan'sche Normalform (6.3.5):
blockdiagonal aus
Jordanblöcken

↓

Hauptraum $H_\varphi(\lambda) = U_\varphi((X - \lambda)^n)$
Zerlegung $V = \bigoplus_\lambda H_\varphi(\lambda)$

↓

Hauptsatz (6.3.7/8):
JNF existiert $\iff$
χ_φ zerfällt in LF

↓

Berechnung der JNF
(6.3.19): Rangpartition pro Eigenwert

Lernziele

- Jordanblöcke und Jordankästchen definieren; eine Matrix in JNF erkennen.
- Haupträume $H_\varphi(\lambda)$ berechnen; Zerlegung $V = \bigoplus H_\varphi(\lambda)$ verstehen.
- Den Hauptsatz 6.3.7 kennen: JNF existiert $\iff$ χ_φ zerfällt in Linearfaktoren (stets über $\mathbb{C}$).
- Eigenschaften aus der JNF ablesen: Eigenwerte, algebraische und geometrische Vielfachheiten.
- Die Jordan-Normalform einer gegebenen Matrix berechnen.

Selbstkontrollelement 6.3

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.