

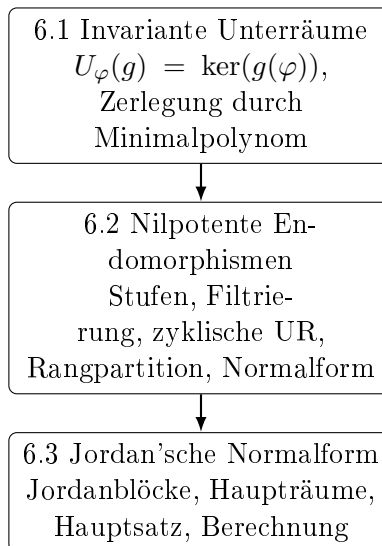
Studierhinweise zu Lektion 6

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion löst das **Normalformproblem**: Jede komplexe quadratische Matrix ist ähnlich zu einer Matrix in **Jordan'scher Normalform**. Der Weg führt über **nilpotente Endomorphismen** (deren Normalformtheorie der schwierigste Schritt ist) und **Haupträume**.

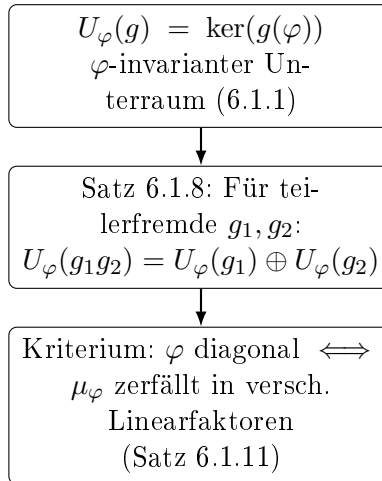
Dies ist die anspruchsvollste Lektion des Moduls – bleiben Sie am Ball. Bevor Sie sich mit der allgemeinen Jordan-Form beschäftigen, sollten Sie zunächst die nilpotente Normalform gründlich verstehen.

Struktur der Lektion 6



Zielelement 6.1 – Invariante Unterräume und Minimalpolynom

Lerninhalte



Lernziele

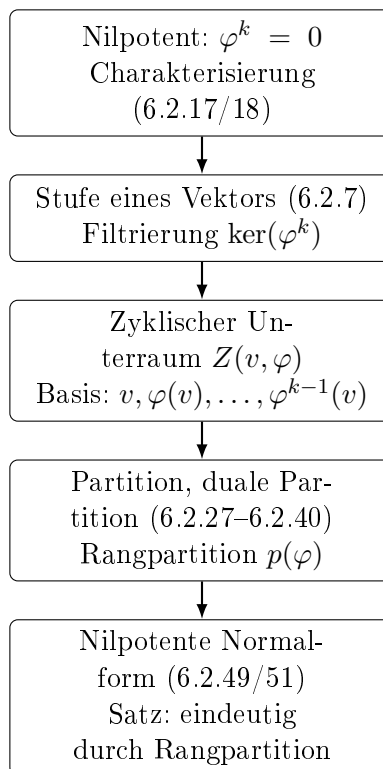
- Den Unterraum $U_\varphi(g) = \ker(g(\varphi))$ berechnen; Invarianz nachweisen.
- Satz 6.1.8 anwenden: Faktorisierung des Minimalpolynoms liefert Zerlegung in invariante Unterräume.
- Das Kriterium 6.1.11 für Diagonalisierbarkeit über das Minimalpolynom anwenden.

Selbstkontrollelement 6.1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie μ_A und zerlegen Sie $\mathbb{R}^2 = U_A(X - 2) \oplus U_A(X - 3)$.

Zielelement 6.2 – Nilpotente Endomorphismen

Lerninhalte



Lernziele

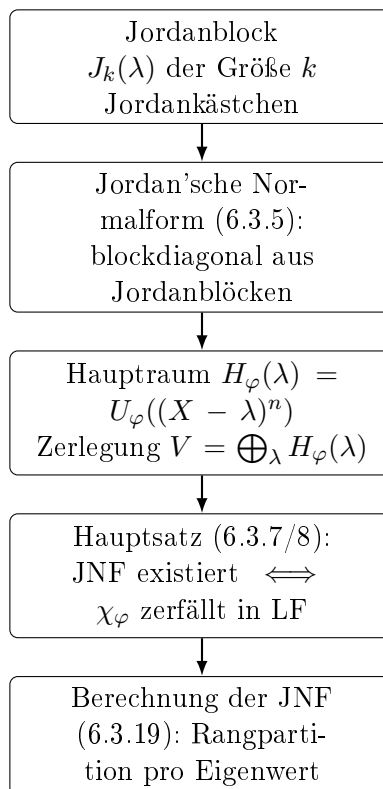
- Nilpotente Endomorphismen definieren; Kriterien 6.2.17/18 kennen.
- Die Filtrierung $\{0\} \subsetneq \ker(\varphi) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \dots$ verstehen.
- Zyklische Unterräume definieren und eine Basis angeben.
- Den Begriff der Partition und der dualen Partition erklären.
- Die Rangpartition $p(\varphi)$ berechnen; die nilpotente Normalform bestimmen.
- Zwei nilpotente Matrizen sind ähnlich \iff gleiche Rangpartition (6.2.54).

Selbstkontrollelement 6.2

Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Rangpartition und die nilpotente Normalform.

Zielelement 6.3 – Jordan'sche Normalform

Lerninhalte



Lernziele

- Jordanblöcke und Jordankästchen definieren; eine Matrix in JNF erkennen.
- Haupträume $H_\varphi(\lambda)$ berechnen; Zerlegung $V = \bigoplus H_\varphi(\lambda)$ verstehen.
- Den Hauptsatz 6.3.7 kennen: JNF existiert $\iff \chi_\varphi$ zerfällt in Linearfaktoren (stets über \mathbb{C}).
- Eigenschaften aus der JNF ablesen: Eigenwerte, algebraische und geometrische Vielfachheiten.
- Die Jordan-Normalform einer gegebenen Matrix berechnen.

Selbstkontrollelement 6.3

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.