

Glossar zu Lektion 6

Lineare Algebra (Modul 61112)

6.1 Invariante Unterräume

6.1.1 Lemma

Für $\varphi \in \text{End}(V)$ und $g \in K[X]$ ist $U_\varphi(g) := \ker(g(\varphi))$ ein φ -invarianter Unterraum. Speziell: $U_\varphi(X - \lambda) = E_\lambda(\varphi)$ (Eigenraum).

6.1.8 Satz

Seien $g_1, g_2 \in K[X]$ teilerfremd und $g = g_1 g_2$. Dann gilt: $U_\varphi(g) = U_\varphi(g_1) \oplus U_\varphi(g_2)$.

6.1.10 Korollar

Ist $\mu_\varphi = g_1 \cdots g_r$ eine Faktorisierung in paarweise teilerfremde Polynome, so gilt $V = U_\varphi(g_1) \oplus \cdots \oplus U_\varphi(g_r)$.

6.1.11 Satz (Diagonalisierbarkeit)

φ ist diagonalisierbar $\iff \mu_\varphi$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

6.2 Nilpotente Endomorphismen

6.2.1 Nilpotent

$\varphi \in \text{End}(V)$ heißt **nilpotent**, wenn $\varphi^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die kleinste solche Zahl heißt **Nilpotenzgrad**.

6.2.17/18 Satz (Charakterisierung)

φ nilpotent $\iff \chi_\varphi = X^n \iff \mu_\varphi = X^m$ für ein $m \leq n \iff 0$ ist einziger Eigenwert.

6.2.7 Stufe

Die **Stufe** von $v \in V$ bzgl. φ ist das kleinste $k \geq 0$ mit $\varphi^k(v) = 0$.

6.2.13 Filtrierung

$\{0\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_m = V$ mit $F_k := \ker(\varphi^k)$ heißt **Filtrierung** zu φ .

6.2.20 Zyklischer Unterraum

Für $v \in V$ ist $Z(v, \varphi) := \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots \rangle$ der **zyklische Unterraum**. Ist die Stufe von v gleich k , so ist $(v, \varphi(v), \dots, \varphi^{k-1}(v))$ eine Basis von $Z(v, \varphi)$.

6.2.25 Satz

Jeder Vektorraum mit nilpotentem Endomorphismus φ lässt sich als direkte Summe zyklischer Unterräume schreiben: $V = Z(v_1, \varphi) \oplus \cdots \oplus Z(v_s, \varphi)$.

6.2.27 Partition

Eine **Partition** von $n \in \mathbb{N}$ ist ein Tupel (p_1, \dots, p_s) mit $p_1 \geq \cdots \geq p_s > 0$ und $\sum p_i = n$.

6.2.41 Rangpartition

Die **Rangpartition** $p(\varphi) = (p_1, \dots, p_s)$ eines nilpotenten φ ist definiert durch die Stufen der Basisvektoren in einer zyklischen Zerlegung. Alternativ: $p_j^* = \text{Rg}(\varphi^{j-1}) - \text{Rg}(\varphi^j)$ (über die duale Partition).

6.2.49 Nilpotente Normalform

Eine nilpotente Matrix N ist in **Normalform**, wenn sie eine Blockdiagonalmatrix

mit Blöcken $J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (Jordanblöcke zum EW 0) ist.

6.2.51 Satz

Jeder nilpotente Endomorphismus hat eine Matrixdarstellung in Normalform, die eindeutig durch die Rangpartition bestimmt ist.

6.2.54 Korollar

Zwei nilpotente Matrizen sind ähnlich \iff sie haben dieselbe Rangpartition.

6.3 Jordan'sche Normalform

6.3.1 Jordanblock

Der **Jordanblock** $J_k(\lambda) \in M_{k,k}(K)$ zum Eigenwert λ und der Größe k ist:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ein 1×1 -Jordanblock ist $J_1(\lambda) = (\lambda)$.

6.3.5 Jordan'sche Normalform

Eine Matrix A ist in **Jordan'scher Normalform** (JNF), wenn sie eine Blockdiagonalmatrix aus Jordanblöcken ist: $A = \text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_r}(\lambda_r))$.

6.3.15 Hauptraum

Zum Eigenwert λ ist der **Hauptraum** $H_\varphi(\lambda) := U_\varphi((X - \lambda)^n) = \ker((\varphi - \lambda \cdot \text{id})^n)$. Es gilt $\dim H_\varphi(\lambda) = \text{aVfh}(\lambda)$.

6.3.7/8 Hauptsatz über die JNF

Sei $\varphi \in \text{End}(V)$, $\dim V = n$. Genau dann hat φ eine Matrixdarstellung in JNF, wenn χ_φ in Linearfaktoren zerfällt. In diesem Fall gilt:

$$V = H_\varphi(\lambda_1) \oplus \dots \oplus H_\varphi(\lambda_r),$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte sind. Die JNF ist bis auf Permutation der Blöcke eindeutig bestimmt.

6.3.9 Eigenschaften aus der JNF

Aus der JNF lassen sich ablesen: Eigenwerte λ_i (Diagonaleinträge), algebraische Vielfachheiten (Größe aller Blöcke zu λ_i), geometrische Vielfachheiten (Anzahl der Blöcke zu λ_i).

6.3.22 Klassifikation komplexer Matrizen

Zwei Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{C})$ sind ähnlich \iff sie dieselbe JNF haben (bis auf Permutation der Blöcke).