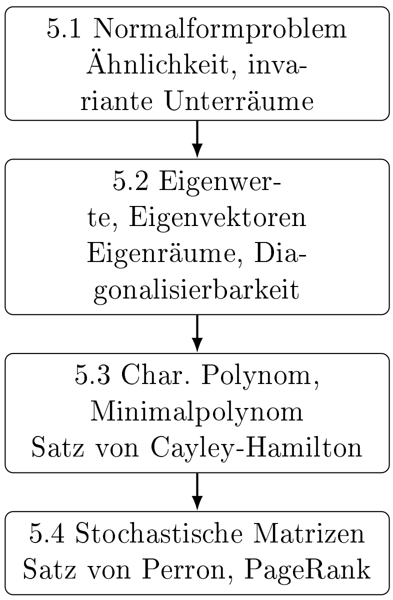
Studierhinweise zu Lektion 5

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion stellt die Werkzeuge für das **Normalformproblem** bereit: Zu einem Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ sucht man eine Basis, in der die Matrixdarstellung möglichst einfach („normal") ist. Der zentrale Begriff ist der des **Eigenvektors** bzw. **Eigenwertes**. Eigenwerte lassen sich als Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** berechnen. Das **Minimalpolynom** und der **Satz von Cayley-Hamilton** runden die Theorie ab.

Die Begriffe in Abschnitt 5.2 sind fundamental – nehmen Sie sich dafür ausreichend Zeit, da sie in Lektion 6 ständig benötigt werden.

Struktur der Lektion 5



Zielelement 5.1 – Normalformproblem und invariante Unterräume

Lerninhalte

Normalformproblem: Ähnlichkeit von Matrizen

$\downarrow$

Invarianter Unterraum U: $\varphi(U) \subseteq U$, Einschränkung $\varphi|_U$

$\downarrow$

Zerlegung in invariante Unterräume $\Rightarrow$ blockdiagonale Matrix (5.1.13)

Lernziele

- Das Normalformproblem für Endomorphismen und Matrizen formulieren.
- Den Begriff des φ-invarianten Unterraums kennen und Beispiele angeben.
- Verstehen, warum eine Zerlegung in invariante Unterräume zu einer blockdiagonalen Matrixdarstellung führt (Satz 5.1.13).

Selbstkontrollelement 5.1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\langle e_1 \rangle$ ein A-invarianter Unterraum ist.

Zielelement 5.2 – Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

Lerninhalte

Eigenvektor $v \neq 0$, Eigenwert λ: $\varphi(v) = \lambda v$

Eigenraum $E_\lambda(\varphi) = \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id})$ Geometrische Vielfachheit

Lemma 5.2.13: Summe der Eigenräume ist direkt

Diagonalisierbar $\iff$ Basis aus Eigenvektoren

Lernziele

- Eigenwerte und Eigenvektoren definieren; Eigenräume berechnen.
- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes bestimmen.
- Das Lemma 5.2.13 kennen: Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen in direkter Summe.
- Kriterium für Diagonalisierbarkeit kennen und anwenden.

Selbstkontrollelement 5.2

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ist A diagonalisierbar?

Zielelement 5.3 – Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Lerninhalte

Char. Polynom
$\chi_\varphi(X) = \det(X \cdot \mathrm{id} - \varphi)$
Nullstellen = Eigenwerte

$\downarrow$

Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes

$\downarrow$

Minimalpolynom μ_φ: kleinster normierter Teiler von χ_φ mit $\mu_\varphi(\varphi) = 0$

$\downarrow$

Satz von Cayley-Hamilton (5.3.42):
$\chi_\varphi(\varphi) = 0$, d. h. $\mu_\varphi \mid \chi_\varphi$

Lernziele

- Das charakteristische Polynom χ_φ berechnen; Grad ist $\dim V$.
- Algebraische und geometrische Vielfachheit unterscheiden; $1 \leq$ geom. $\leq$ alg.
- Das Minimalpolynom als normierten Erzeuger des Verschwindungsideals (5.3.32) kennen.
- Den Satz von Cayley-Hamilton (5.3.42) anwenden: $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Selbstkontrollelement 5.3

Berechnen Sie χ_A und μ_A für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

Zielelement 5.4 – Stochastische Matrizen und PageRank

Lerninhalte

Stochastische Matrix: Spalten summieren sich zu 1, alle Einträge ≥ 0

$\downarrow$

Satz von Perron (5.4.6): Eigenwert 1 mit geo. Vfh. 1

$\downarrow$

Google PageRank: Stationäre Verteilung als Eigenvektor

Lernziele

- Stochastische Matrizen definieren und erkennen.
- Den Satz von Perron (5.4.6) kennen: positive stochastische Matrizen haben Eigenwert 1 mit geometrischer Vielfachheit 1.
- Das Prinzip des Google PageRank-Algorithmus erklären.

Selbstkontrollelement 5.4

Bestimmen Sie den Eigenvektor zum Eigenwert 1 von $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.