

Glossar zu Lektion 5

Lineare Algebra (Modul 61112)

5.1 Normalformproblem

5.1.2 Normalformproblem

Zu $\varphi \in \text{End}(V)$: Finde eine geordnete Basis B , sodass $M_B(\varphi)$ möglichst einfach ist. Äquivalent für Matrizen: Finde ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen in $M_{n,n}(K)$. Zwei Endomorphismen sind **ähnlich** (bzgl. Basiswechsel), wenn ihre Matrixdarstellungen ähnlich sind: $B' = S^{-1}BS$.

5.1.5 Invarianter Unterraum

$U \subseteq V$ heißt φ -**invariant**, wenn $\varphi(u) \in U$ für alle $u \in U$. Dann ist $\varphi|_U : U \rightarrow U$ ein Endomorphismus von U .

5.1.13 Satz (Blockdiagonalform)

Ist $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ mit φ -invarianten Unterräumen, so hat $M_B(\varphi)$ bzgl. der vereinigten Basis Blockdiagonalgestalt.

5.2 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

5.2.1 Eigenvektor, Eigenwert

$v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** von φ zum **Eigenwert** $\lambda \in K$, wenn $\varphi(v) = \lambda v$. λ ist Eigenwert $\iff \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$ ist *nicht* bijektiv.

5.2.8 Eigenraum

Zu $\lambda \in K$: $E_\lambda(\varphi) := \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$. Dies ist ein φ -invarianter Unterraum.

5.2.10 Geometrische Vielfachheit

$\text{gVfh}(\lambda) := \dim E_\lambda(\varphi) \geq 1$ (wenn λ Eigenwert).

5.2.13 Lemma

Die Summe der Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten ist direkt: $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

5.2 Diagonalisierbarkeit

φ heißt **diagonalisierbar**, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Äquivalent: $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ (direkte Summe aller Eigenräume).

5.3 Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

5.3.1 Charakteristisches Polynom

$\chi_\varphi(X) := \det(X \cdot \text{id}_V - \varphi) \in K[X]$. Dies ist ein normiertes Polynom vom Grad $n = \dim V$. **Eigenwerte** von φ sind genau die Nullstellen von χ_φ .

5.3 Algebraische Vielfachheit

Die **algebraische Vielfachheit** $\text{aVfh}(\lambda)$ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_φ . Es gilt stets: $\text{gVfh}(\lambda) \leq \text{aVfh}(\lambda)$.

5.3.32 Minimalpolynom

Das **Verschwindungsideal** $I(\varphi) := \{f \in K[X] \mid f(\varphi) = 0\}$ ist ein Ideal in $K[X]$. Der normierte Erzeuger μ_φ heißt **Minimalpolynom** von φ . Es ist der eindeutige normierte Teiler kleinsten Grades mit $\mu_\varphi(\varphi) = 0$.

5.3.39 Satz

Die Nullstellen von μ_φ sind genau die Eigenwerte von φ .

5.3.42 Satz von Cayley-Hamilton

$\chi_\varphi(\varphi) = 0$, d. h. $\mu_\varphi \mid \chi_\varphi$.

5.4 Stochastische Matrizen

5.4.1 Stochastische Matrix

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt (**spalten**)stochastisch, wenn alle Einträge ≥ 0 sind und jede Spalte die Summe 1 hat: $\sum_i a_{ij} = 1$.

5.4.6 Satz von Perron

Jede **positive** stochastische Matrix ($a_{ij} > 0$) hat den Eigenwert 1 mit geometrischer Vielfachheit 1. Alle anderen Eigenwerte haben Betrag < 1 .