

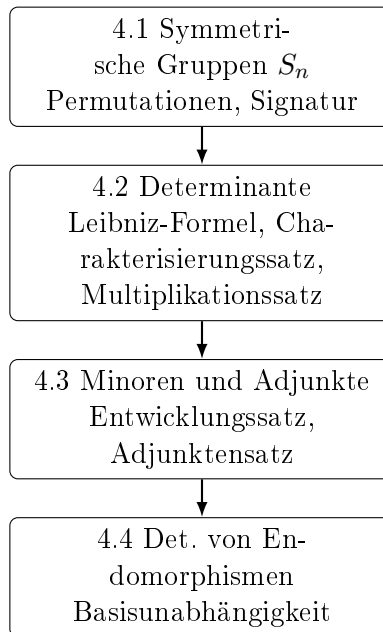
# Studierhinweise zu Lektion 4

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion behandelt die **Determinante** – eine der zentralen Funktionen der Linearen Algebra. Die Determinante  $\det(A) \in R$  einer quadratischen Matrix  $A \in M_{n,n}(R)$  entscheidet über die Invertierbarkeit von  $A$  und wird in Lektion 5 zur Definition des charakteristischen Polynoms benötigt. Die Lektion ist wichtig, aber zugänglich – viele Determinanten rechnen zu üben hilft schnell, ein intuitives Gefühl zu entwickeln.

## Struktur der Lektion 4

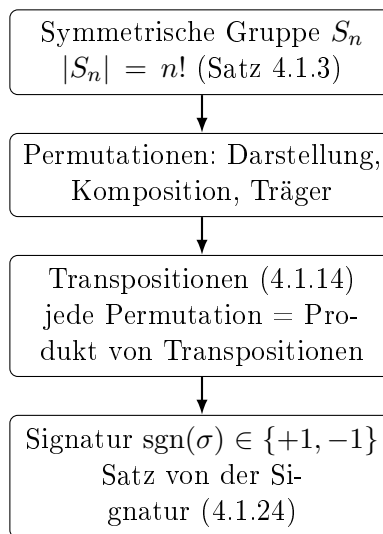
---



## Zielelement 4.1 – Symmetrische Gruppen

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Permutationen in Tabellenform lesen und Kompositionen ausrechnen.
- Jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellen.
- Die Signatur einer Permutation über Fehlstände oder Transpositionen bestimmen.
- Den Satz 4.1.24 kennen:  $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$ .

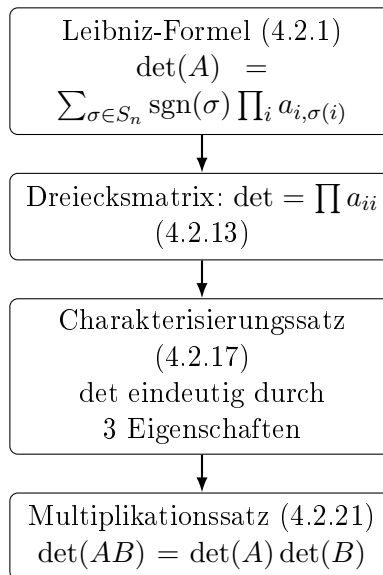
### Selbstkontrollelement 4.1

Berechnen Sie die Signatur der Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Zielelement 4.2 – Determinante

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Die Leibniz-Formel kennen und für kleine Matrizen ( $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ) anwenden.
- Den Charakterisierungssatz (4.2.17) kennen: det ist die eindeutige alternierende multilineare Funktion mit  $\det(I) = 1$ .
- Den Multiplikationssatz anwenden:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ,  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .
- Die Determinante durch elementare Zeilenumformungen berechnen.
- $A$  invertierbar  $\iff \det(A) \neq 0$ .

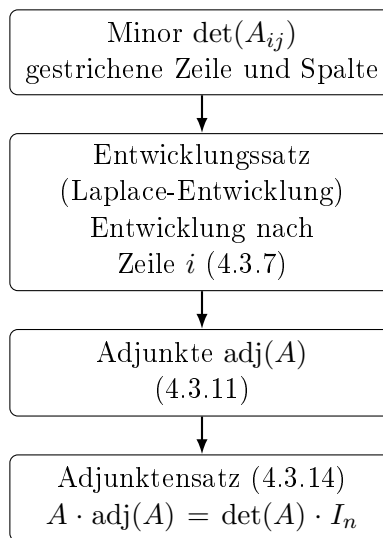
### Selbstkontrollelement 4.2

Berechnen Sie  $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  mithilfe von Zeilenumformungen.

## Zielelement 4.3 – Minoren, Entwicklungssatz und Adjunkte

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Minoren einer Matrix berechnen.
- Die Laplace-Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte anwenden.
- Die Adjunkte einer Matrix bestimmen.
- Den Adjunktensatz kennen und zur Berechnung von  $A^{-1}$  einsetzen:  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ .

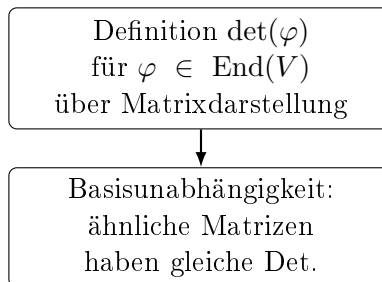
### Selbstkontrollelement 4.3

Berechnen Sie  $A^{-1}$  für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  mithilfe des Adjunktensatzes.

## Zielelement 4.4 – Determinante von Endomorphismen

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Die Determinante eines Endomorphismus als basisunabhängige Größe definieren.
- Verstehen, warum ähnliche Matrizen dieselbe Determinante haben (4.2.26).
- $\det(\varphi)$  an einem konkreten Endomorphismus berechnen.

### Selbstkontrollelement 4.4

Sei  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Drehung um 90. Berechnen Sie  $\det(\varphi)$  und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.