Glossar zu Lektion 4

Lineare Algebra (Modul 61112)

4.1 Symmetrische Gruppen

4.1.1/2 Symmetrische Gruppe S_n

$S_n := \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$ ist die Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von $\{1, \dots, n\}$ unter Komposition. Die Elemente heißen **Permutationen**.

4.1.3 Satz

$|S_n| = n!$.

4.1.14 Transposition

Eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und alle anderen festlässt, heißt **Transposition**.

4.1.16 Satz

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Komposition von Transpositionen schreiben.

4.1.18 Fehlstand

Ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt **Fehlstand** von σ.

4.1.20 Signatur (Vorzeichen)

$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{f(\sigma)}$, wobei $f(\sigma)$ die Anzahl der Fehlstände ist. Permutationen mit $\mathrm{sgn} = +1$ heißen **gerade**, mit $\mathrm{sgn} = -1$ **ungerade**.

4.1.24 Satz von der Signatur

$\mathrm{sgn} : S_n \to \{+1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus: $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$. Jede Transposition hat Signatur -1.

4.2 Determinante

4.2.1 Leibniz-Formel

Für $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Speziell: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

4.2.13 Korollar (Dreiecksmatrix)

Für obere (oder untere) Dreiecksmatrizen: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

4.2.17 Charakterisierungssatz

Die Determinante ist die eindeutige Abbildung $\det : M_{n,n}(K) \to K$ mit:

(i) Multilinear in den Spalten (oder Zeilen).

(ii) Alternierend: Vertauschen zweier Spalten wechselt das Vorzeichen.

(iii) Normiert: $\det(I_n) = 1$.

Folgerung: $\det(A) = 0 \iff A$ nicht invertierbar; $\det(A^\top) = \det(A)$.

4.2.20 Weitere Eigenschaften

- Elementare Zeilenumformungen: Z_{ij} wechselt Vorzeichen; $Z_i(r)$ multipliziert mit r; $Z_{ij}(s)$ ändert det nicht.
- Hat A zwei gleiche Zeilen: $\det(A) = 0$.

4.2.21 Multiplikationssatz

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in M_{n,n}(K)$. Folgerung: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

4.2.26 Korollar (Ähnliche Matrizen)

Ähnliche Matrizen ($B = S^{-1}AS$) haben dieselbe Determinante.

4.3 Minoren und Adjunkte

4.3.1 Minor

Für $A \in M_{n,n}(K)$ sei A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Der **Minor** ist $\det(A_{ij})$.

4.3.7 Entwicklungssatz (Laplace)

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Analog ist Entwicklung nach einer Spalte möglich.

4.3.11 Adjunkte

Die **Adjunkte** von A ist $\operatorname{adj}(A) := ((-1)^{i+j} \det(A_{ji}))_{i,j}$ (transponierte Kofaktorenmatrix).

4.3.14 Adjunktensatz

$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$. Folgerung (Cramer'sche Regel): Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

4.4 Determinante von Endomorphismen

4.4.5 Definition $\det(\varphi)$

Für $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ und eine Basis B von V: $\det(\varphi) := \det(M_B(\varphi))$. Dies ist wohldefiniert, da ähnliche Matrizen dieselbe Determinante haben.

Invertierbarkeit

φ ist ein Isomorphismus $\iff \det(\varphi) \neq 0$.