

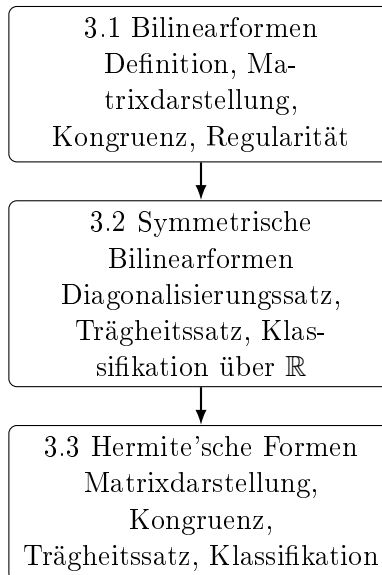
Studierhinweise zu Lektion 3

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion behandelt **Bilinearformen** und **Hermite'sche Formen** – Abbildungen $\beta : U \times U \rightarrow K$, die in beiden Argumenten linear sind. Das Ziel ist die vollständige **Klassifikation** dieser Formen (bis auf Kongruenz). Für reelle symmetrische Bilinearformen liefert der **Trägheitssatz** die Klassifikation, für Hermite'sche Formen ein analoges Ergebnis.

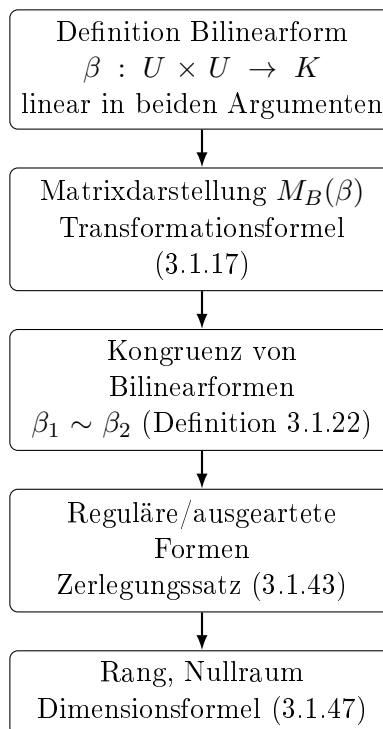
Diese Lektion ist anspruchsvoll – investieren Sie ausreichend Zeit. Ergebnisse hieraus werden in Lektion 7 (Skalarprodukte) wieder aufgegriffen. Lesen Sie Abschnitt 3.1 besonders genau.

Struktur der Lektion 3



Zielelement 3.1 – Bilinearformen

Lerninhalte



Lernziele

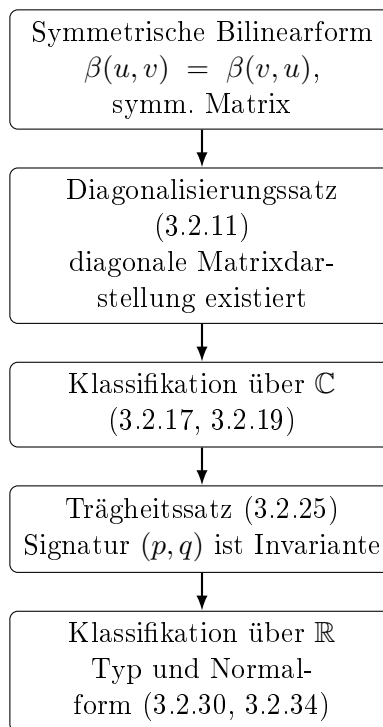
- Eine Bilinearform definieren; an konkreten Beispielen die Matrixdarstellung berechnen.
- Die Transformationsformel (3.1.17) anwenden: $M_{B'}(\beta) = S^T M_B(\beta) S$.
- Kongruenz von Bilinearformen und Matrixkongruenz ($A \sim S^T A S$) verstehen.
- Reguläre und ausgeartete Formen unterscheiden; den Zerlegungssatz (3.1.43) kennen.
- Rang und Nullraum einer Bilinearform definieren und die Dimensionsformel anwenden.

Selbstkontrollelement 3.1

Sei $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta(u, v) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + u_2 v_2$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis und entscheiden Sie, ob β regulär ist.

Zielelement 3.2 – Symmetrische Bilinearformen

Lerninhalte



Lernziele

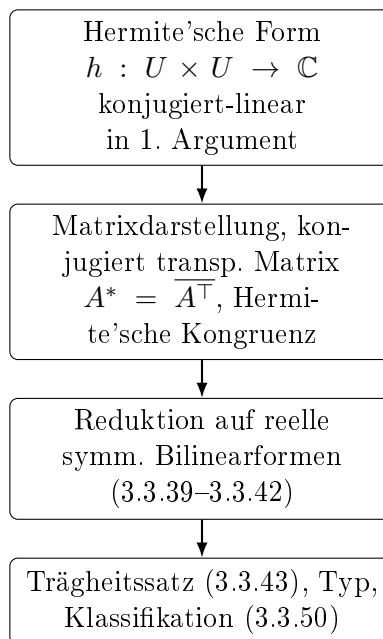
- Symmetrische Bilinearformen erkennen und die Polarisationsformel (3.2.10) anwenden.
- Den Diagonalisierungssatz (3.2.11) kennen und eine diagonale Matrixdarstellung berechnen.
- Den Trägheitssatz (3.2.25) verstehen: Die Signatur (p, q) hängt nicht von der Diagonalisierung ab.
- Reelle symmetrische Bilinearformen nach Typ klassifizieren; Normalform angeben.

Selbstkontrollelement 3.2

Bestimmen Sie die Signatur der reellen symmetrischen Bilinearform mit Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ist β positiv definit?

Zielelement 3.3 – Hermite'sche Formen

Lerninhalte



Lernziele

- Eine Hermite'sche Form definieren; Matrixdarstellung und Hermite'sche Kongruenz kennen.
- Hermite'sche Matrizen ($A = A^*$) erkennen und die Transformationsformel anwenden.
- Den Zusammenhang zu reellen symmetrischen Bilinearformen verstehen (3.3.39).
- Hermite'sche Formen nach Signatur klassifizieren; positiv/negativ definit erkennen.

Selbstkontrollelement 3.3

Ist die Hermite'sche Form mit Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Hauptminorenkriteriums.