Glossar zu Lektion 3

Lineare Algebra (Modul 61112)

3.1 Bilinearformen

3.1.1 Bilinearform

Sei K ein Körper, U ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $\beta : U \times U \to K$ heißt **Bilinearform**, wenn sie linear in beiden Argumenten ist:

(a) $\beta(au + u', v) = a\beta(u, v) + \beta(u', v)$,

(b) $\beta(u, av + v') = a\beta(u, v) + \beta(u, v')$.

3.1.9 Satz

$\mathrm{Bil}_K(U)$, die Menge aller Bilinearformen auf U, ist ein K-Vektorraum.

3.1.10 Matrixdarstellung

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von U. Die **Matrixdarstellung** von β bzgl. B ist $M_B(\beta) := (\beta(b_i, b_j))_{i,j} \in M_{n,n}(K)$.

3.1.14 Satz

Eine Bilinearform β ist durch ihre Matrixdarstellung $M_B(\beta)$ eindeutig bestimmt. $\dim \mathrm{Bil}_K(U) = n^2$.

3.1.17 Transformationsformel

Sei $S = M_{BB'}(\mathrm{id}_U)$ die Basiswechselmatrix. Dann gilt:

$$M_{B'}(\beta) = S^\top \cdot M_B(\beta) \cdot S.$$

3.1.22 Kongruenz

Zwei Matrizen $A, B \in M_{n,n}(K)$ heißen **kongruent** ($A \sim_K B$), wenn es eine invertierbare Matrix S gibt mit $B = S^\top AS$. Zwei Bilinearformen β_1, β_2 heißen kongruent, wenn ihre Matrixdarstellungen kongruent sind.

3.1.37 Regulär / ausgeartet

Eine Bilinearform β auf U heißt **regulär**, wenn die zugehörige lineare Abbildung $\beta^{(1)} : U \to U^*$, $u \mapsto \beta(u, -)$, ein Isomorphismus ist. Andernfalls heißt β **ausgeartet**. Äquivalent: $\det(M_B(\beta)) \neq 0$.

3.1.43 Zerlegungssatz

Sei β eine Bilinearform auf U und $U_0 \subseteq U$ ein **regulärer Unterraum** (d. h. $\beta|_{U_0}$ regulär). Dann gilt $U = U_0 \oplus U_0^\perp$.

3.1.44/45 Rang und Nullraum

Der **Rang** $\mathrm{Rg}(\beta) := \mathrm{Rg}(M_B(\beta))$. Der **Nullraum** $\mathrm{Rad}(\beta) := \ker(\beta^{(1)}) = \{u \in U \mid \beta(u, v) = 0 \;\forall\, v\}$.

3.1.47 Dimensionsformel

$\dim U = \mathrm{Rg}(\beta) + \dim \mathrm{Rad}(\beta)$.

3.2 Symmetrische Bilinearformen

3.2.1 Symmetrische Bilinearform

β heißt **symmetrisch**, wenn $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ für alle $u, v \in U$. Äquivalent: $M_B(\beta)$ ist symmetrisch für jede Basis B.

3.2.10 Polarisationsformel

Für symmetrisches β (mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$): $\beta(u,v) = \frac{1}{2}\big(\beta(u+v,u+v) - \beta(u,u) - \beta(v,v)\big)$.

3.2.11 Diagonalisierungssatz

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen K-Vektorraum U mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dann gibt es eine Basis B', sodass $M_{B'}(\beta)$ eine Diagonalmatrix ist.

3.2.17/19 Klassifikation über $\mathbb{C}$

Jede symmetrische Bilinearform über $\mathbb{C}$ mit Rang r ist kongruent zur Form mit Matrix $\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$ (r Einsen).

3.2.25 Trägheitssatz (Sylvester)

Jede reelle symmetrische Bilinearform mit Rang r ist kongruent zu einer Diagonalform mit p Einsen und $q = r - p$ negativen Einsen. Die **Signatur** (p,q) ist unabhängig von der Wahl der Diagonalisierung.

3.2.26 Typ

Der **Typ** einer reellen symmetrischen Bilinearform ist die Signatur (p,q). Zwei Formen sind kongruent genau dann, wenn sie denselben Typ haben.

3.2.30 Normalform über $\mathbb{R}$

Die Normalform ist $\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{q}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$.

Positiv/negativ (semi)definit

- **positiv definit**: $\beta(u,u) > 0$ für alle $u \neq 0$ ($q = 0$, $r = n$).
- **negativ definit**: $\beta(u,u) < 0$ für alle $u \neq 0$ ($p = 0$, $r = n$).
- **positiv semidefinit**: $\beta(u,u) \geq 0$ für alle u ($q = 0$).
- **indefinit**: $p > 0$ und $q > 0$.

3.3 Hermite'sche Formen

3.3.1 Hermite'sche Form

Eine Abbildung $h : U \times U \to \mathbb{C}$ (U ein $\mathbb{C}$-VR) heißt **Hermite'sche Form**, wenn:

(a) $h(au + u', v) = \bar{a}\, h(u,v) + h(u',v)$ (konjugiert-linear in 1. Argument),

(b) $h(u, av + v') = a\, h(u,v) + h(u,v')$ (linear in 2. Argument),

(c) $h(v, u) = \overline{h(u, v)}$ (Hermite'sche Symmetrie).

Insbesondere ist $h(u, u) \in \mathbb{R}$ für alle u.

3.3.20 Matrixdarstellung

Zu einer Basis B ist $M_B(h) = (h(b_j, b_i))_{i,j}$. Diese Matrix ist **Hermitesch**: $M_B(h)^* = M_B(h)$, wobei $A^* := \overline{A^\top}$.

3.3.25 Transformationsformel

$M_{B'}(h) = S^* \cdot M_B(h) \cdot S$ mit $S^* = \overline{S^\top}$.

3.3.43 Trägheitssatz für Hermite'sche Formen

Jede Hermite'sche Form mit Rang r hat eine eindeutige Signatur (p, q) mit $p+q = r$. Die Normalform ist $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$.

3.3.50 Klassifikation

Zwei Hermite'sche Formen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum sind genau dann kongruent, wenn sie dieselbe Signatur haben.