

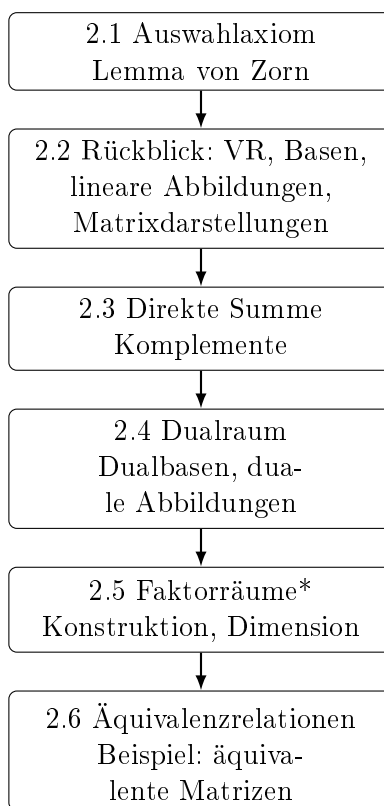
# Studierhinweise zu Lektion 2

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion liefert die konzeptuellen Grundlagen für den gesamten weiteren Verlauf des Moduls. Nach einem Exkurs über das **Auswahlaxiom** und das **Lemma von Zorn** werden bekannte Begriffe (Vektorräume, Basen, lineare Abbildungen) aus den Mathematischen Grundlagen wiederholt und vertieft. Der Schwerpunkt liegt auf drei fundamentalen Konstruktionen: **direkte Summe**, **Dualraum** und **Faktorraum**. Schließen Sie etwaige Lücken bei Basiswechsel und Matrixdarstellungen frühzeitig, da diese Begriffe ständig benötigt werden.

## Struktur der Lektion 2

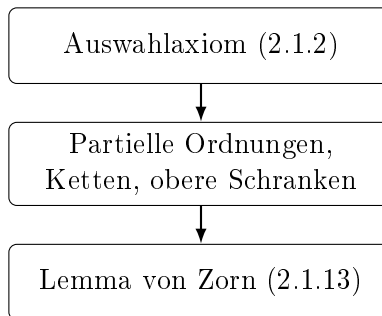
---



## Zielelement 2.1 – Auswahlaxiom und Lemma von Zorn

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Das Auswahlaxiom und seine Bedeutung kennen (nicht klausurrelevant).
- Das Lemma von Zorn als Folgerung aus dem Auswahlaxiom einordnen.
- Verstehen, warum das Lemma von Zorn für den Basisergänzungssatz benötigt wird.

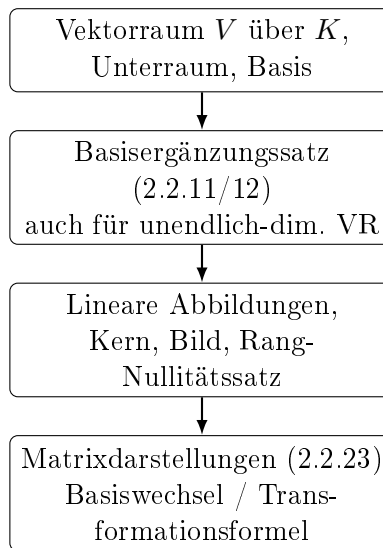
### Selbstkontrollelement 2.1

Was besagt das Lemma von Zorn informal? Welche Anwendung hat es im Basisergänzungssatz?

## Zielelement 2.2 – Rückblick: Vektorräume, Basen, lineare Abbildungen

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Vektorraum-Axiome, Unterraum-Kriterium und Dimensionsbegriff sicher beherrschen.
- Den Basisergänzungssatz kennen und anwenden.
- Matrixdarstellungen linearer Abbildungen berechnen; Transformationsformel (2.2.28) anwenden.
- Zusammenhang zwischen Matrixdarstellung und Basiswechsel verstehen.

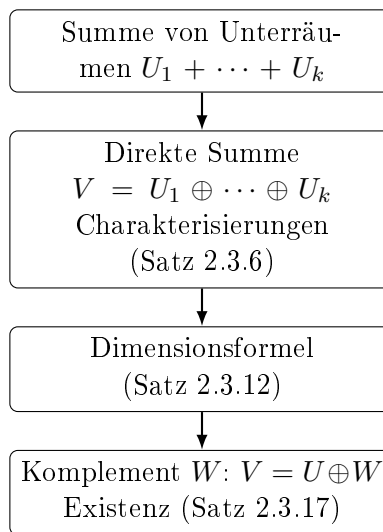
### Selbstkontrollelement 2.2

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x + y, 2x)$ . Berechnen Sie die Matrixdarstellung von  $f$  bzgl. der Standardbasis und der Basis  $\{(1, 1), (1, 0)\}$ .

## Zielelement 2.3 – Direkte Summe

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Definition der direkten Summe kennen; Charakterisierungen aus Satz 2.3.6 anwenden.
- Dimensionsformel für direkte Summen benutzen.
- Den Begriff des Komplementes kennen; verstehen, dass zu jedem Unterraum ein Komplement existiert.

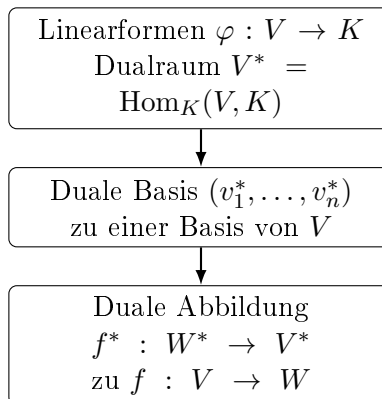
### Selbstkontrollelement 2.3

Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ . Geben Sie ein Komplement von  $U$  an und verifizieren Sie  $V = U \oplus W$ .

## Zielelement 2.4 – Dualraum

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Den Dualraum  $V^*$  als Vektorraum aller Linearformen definieren und mit der Dualbasis rechnen.
- Koordinaten eines Vektors bzgl. der Dualbasis berechnen.
- Die duale Abbildung  $f^*$  definieren und als lineare Abbildung erkennen.

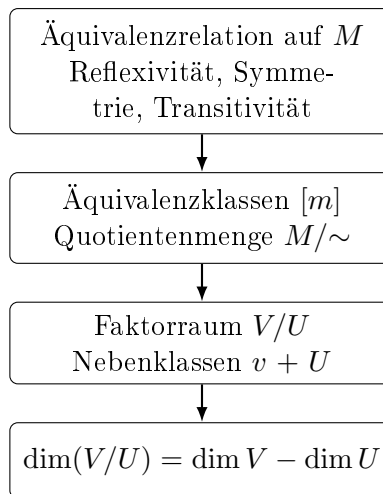
### Selbstkontrollelement 2.4

Sei  $V = \mathbb{R}^2$  mit Standardbasis  $\{e_1, e_2\}$ . Bestimmen Sie die duale Basis  $\{e_1^*, e_2^*\}$  und berechnen Sie  $e_1^*((3, 7))$ .

## Zielelement 2.5/2.6 – Faktorräume und Äquivalenzrelationen

---

### Lerninhalte



### Lernziele

- Eine Äquivalenzrelation definieren und Äquivalenzklassen bestimmen.
- Den Faktorraum  $V/U$  als Quotient eines Vektorraums nach einem Unterraum konstruieren.
- Die Dimension von  $V/U$  berechnen.
- Das Beispiel der äquivalenten Matrizen (2.6) kennen.

### Selbstkontrollelement 2.5/2.6

Sei  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $U = \langle e_3 \rangle$ . Beschreiben Sie die Nebenklassen im Faktorraum  $V/U$  geometrisch. Was ist  $\dim(V/U)$ ?