Glossar zu Lektion 2

Lineare Algebra (Modul 61112)

2.1 Auswahlaxiom

2.1.2 Auswahlaxiom

Für jede Familie nichtleerer Mengen $(M_i)_{i\in I}$ gibt es eine Auswahlfunktion f mit $f(i) \in M_i$ für alle i.

2.1.13 Lemma von Zorn

Sei $(M, \leq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Dann hat M ein **maximales Element**.

2.2 Rückblick: Vektorräume, Basen, lineare Abbildungen

2.2.1 Vektorraum

Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Skalarmultiplikation $K \times V \to V$, die die vier Vektorraumaxiome erfüllt.

2.2.4 Unterraum

$U \subseteq V$ heißt **Unterraum**, wenn $0 \in U$, U unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

2.2.7 Lineare Unabhängigkeit

$v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus $\sum a_i v_i = 0$ folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

2.2.10 Basis

Eine **Basis** von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Alle Basen eines endlich-dimensionalen VR haben dieselbe Kardinalität, die **Dimension** $\dim V$.

2.2.11/12 Satz (Basisergänzungssatz)

Jedes linear unabhängige System lässt sich zu einer Basis ergänzen. Jede Basis lässt sich aus einem Erzeugendensystem herausgreifen. (Beweis über Lemma von Zorn für unendliche Dimension.)

2.2.17 Lineare Abbildung

$f : V \to W$ heißt **linear**, wenn $f(u + v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. **Rang-Nullitätssatz**: $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$.

2.2.23 Matrixdarstellung

Zu Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ von W ist die Matrixdarstellung von $f : V \to W$ die Matrix ${}_C M_B(f) \in M_{m,n}(K)$ mit Spalten $\kappa_C(f(b_j))$.

2.2.28 Transformationsformel (Basiswechsel)

Sei $T = {}_B M_{B'}(\mathrm{id}_V)$ die Transformationsmatrix. Dann gilt:

$${}_C M_{B'}(f) = {}_C M_B(f) \cdot T.$$

2.3 Direkte Summe

2.3.1 Summe von Unterräumen

Für Unterräume $U_1, \dots, U_k \subseteq V$: $U_1 + \cdots + U_k := \{u_1 + \cdots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

2.3.5 Direkte Summe

Die Summe heißt **direkt** ($V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$), wenn jedes $v \in V$ sich eindeutig als $v = u_1 + \cdots + u_k$ schreiben lässt.

2.3.6 Satz (Charakterisierungen)

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ ist äquivalent zu:

- $U_i \cap (U_1 + \cdots + \hat{U}_i + \cdots + U_k) = \{0\}$ für alle i.
- Die Vereinigung von Basen der U_i ist eine Basis von V.

2.3.12 Satz (Dimensionsformel)

$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_k) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

2.3.14 Komplement

W heißt **Komplement** von U in V, wenn $V = U \oplus W$.

2.3.17 Satz (Existenz des Komplements)

Zu jedem Unterraum $U \subseteq V$ existiert ein Komplement W mit $V = U \oplus W$.

2.4 Dualraum

2.4.3 Dualraum

Der **Dualraum** von V ist $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$, der K-Vektorraum aller Linearformen $\varphi : V \to K$. Es gilt $\dim V^* = \dim V$ (für endlich-dimensionales V).

2.4.10 Duale Basis

Zur Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V ist die **duale Basis** $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

2.4.16 Duale Abbildung

Zu $f : V \to W$ ist die **duale Abbildung** $f^* : W^* \to V^*$ definiert durch $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

2.5 Faktorräume*

2.5.1 Faktorraum (Quotientenvektorraum)

Sei $U \subseteq V$ Unterraum. Die **Nebenklassen** $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ bilden den **Faktorraum** V/U mit $(v+U) + (w+U) := (v+w) + U$ und $\lambda(v+U) := (\lambda v) + U$.

2.5 Dim. Satz (Dimension)

$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

2.6 Äquivalenzrelationen

2.6.1 Äquivalenzrelation

Eine Relation $\sim$ auf M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv ($a \sim a$), symmetrisch ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$) und transitiv ($a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$) ist.

Äquivalenzklasse

$[a] := \{b \in M \mid a \sim b\}$. Die Menge $M/{\sim}$ aller Äquivalenzklassen heißt **Quotientenmenge**.

2.6 Äquivalente Matrizen

$A, B \in M_{m,n}(K)$ heißen **äquivalent**, wenn es invertierbare $S \in M_{m,m}(K)$ und $T \in M_{n,n}(K)$ gibt mit $B = SAT$.