

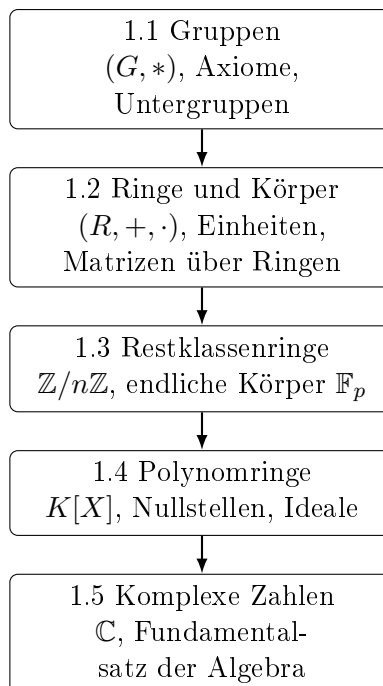
Studierhinweise zu Lektion 1

Lineare Algebra (Modul 61112)

Diese Lektion legt algebraische Grundlagen für den gesamten weiteren Verlauf des Moduls. Drei algebraische Strukturen stehen im Mittelpunkt: **Gruppen**, **Ringe** und **Körper**. Darüber hinaus werden **Restklassenringe** und **endliche Körper** \mathbb{F}_p , der zentrale **Polynomring** $K[X]$ sowie der **Körper** \mathbb{C} **der komplexen Zahlen** behandelt. Polynome sind ein unentbehrliches Werkzeug – hinter der Jordan'schen Normalform (Lektion 6) verbirgt sich im Kern die Theorie der Moduln über Polynomringen.

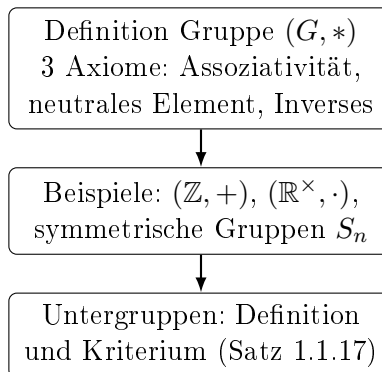
Lesen Sie Abschnitt 1.4 (Polynomringe) besonders gründlich; er ist der anspruchsvollste der Lektion. Üben Sie außerdem das Rechnen in \mathbb{F}_p und \mathbb{C} an konkreten Beispielen.

Struktur der Lektion 1



Zielelement 1.1 – Gruppen

Lerninhalte



Lernziele

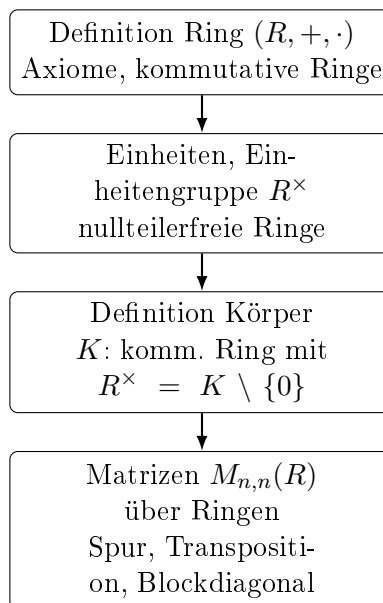
- Die drei Gruppenaxiome kennen und in Beispielen nachweisen können.
- Das kürzere äquivalente Kriterium (Satz 1.1.17) zur Prüfung von Gruppen anwenden.
- Den Begriff der Untergruppe kennen und Beispiele angeben können.
- Rechenregeln für Inverse (Anmerkung 1.1.3) sicher anwenden.

Selbstkontrollelement 1.1

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Begründen Sie.

Zielelement 1.2 – Ringe, Körper und Matrizen über Ringen

Lerninhalte



Lernziele

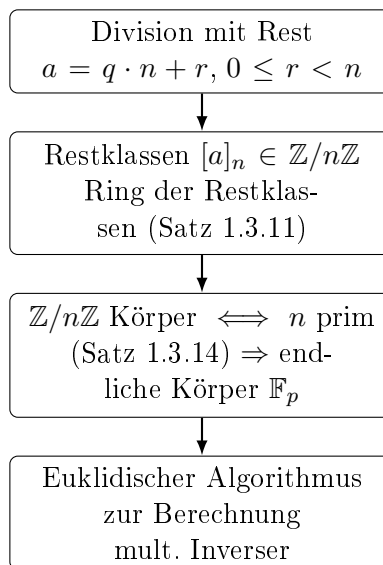
- Die Ringaxiome kennen; kommutativen Ring, Körper und nullteilerfreien Ring unterscheiden.
- Einheiten in Ringen bestimmen; verstehen, dass Körper nullteilerfrei sind (Lemma 1.2.23).
- Satz 1.2.28 kennen: $M_{n,n}(R)$ ist selbst ein Ring.
- Spur, Transposition und Blockdiagonalmatrizen als Begriffe kennen.

Selbstkontrollelement 1.2

Bestimmen Sie die Einheitengruppe von \mathbb{Z} und von $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Warum ist \mathbb{Z} kein Körper?

Zielelement 1.3 – Restklassenringe und endliche Körper

Lerninhalte



Lernziele

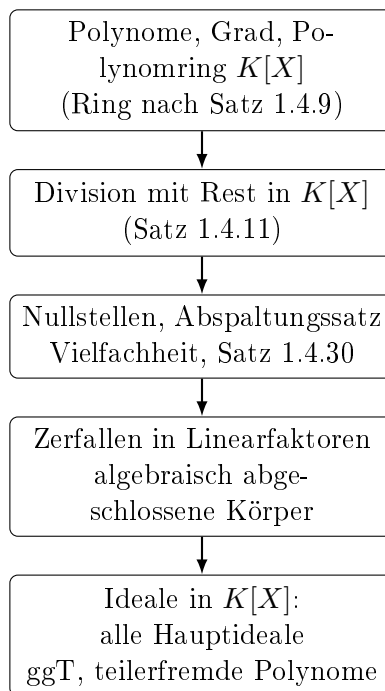
- Restklassen definieren und in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ addieren und multiplizieren.
- Erkennen, wann $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper ist; in \mathbb{F}_p sicher rechnen.
- Den euklidischen Algorithmus zur Bestimmung multiplikativer Inverser anwenden.

Selbstkontrollelement 1.3

Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $[5]$ in \mathbb{F}_7 .

Zielelement 1.4 – Polynomringe

Lerninhalte



Lernziele

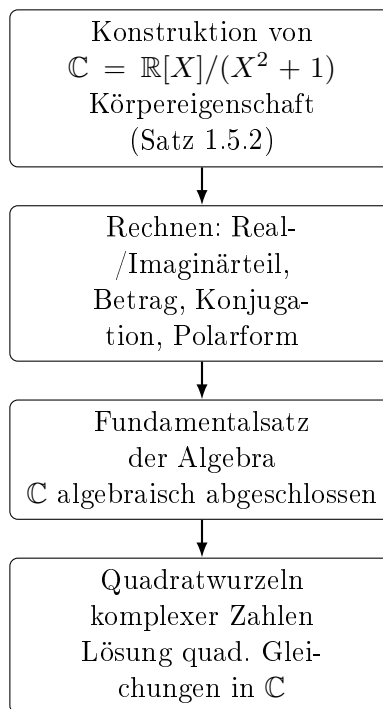
- Polynome definieren, Grad berechnen und in $K[X]$ addieren/multiplizieren.
- Division mit Rest im Polynomring anwenden (Polynomdivision).
- Nullstellen bestimmen; Abspaltungssatz (1.4.21) und Vielfachheit kennen.
- Den Satz 1.4.49 kennen: Jedes Ideal in $K[X]$ ist ein Hauptideal.
- Den Begriff des algebraisch abgeschlossenen Körpers erklären.

Selbstkontrollelement 1.4

Führen Sie in $\mathbb{R}[X]$ die Division $X^3 - 2X + 1$ durch $X - 1$ mit Rest durch. Welche Schlussfolgerung können Sie über Nullstellen ziehen?

Zielelement 1.5 – Komplexe Zahlen und Fundamentalsatz

Lerninhalte



Lernziele

- \mathbb{C} als Erweiterung von \mathbb{R} konstruieren; Real-/Imaginärteil, Betrag, Konjugation verwenden.
- Sicher mit komplexen Zahlen rechnen (Polarform, Rechenregeln 1.5.15–1.5.24).
- Den Fundamentalsatz der Algebra (1.5.25) kennen: \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.
- Quadratwurzeln komplexer Zahlen berechnen; quadratische Gleichungen in \mathbb{C} lösen.

Selbstkontrollelement 1.5

Berechnen Sie $(3 + 2i)(1 - i)$ und $\frac{1 + i}{2 - i}$. Bestimmen Sie außerdem alle Lösungen von $z^2 + 2z + 5 = 0$ in \mathbb{C} .