Studierhinweise zu Lektion 7

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

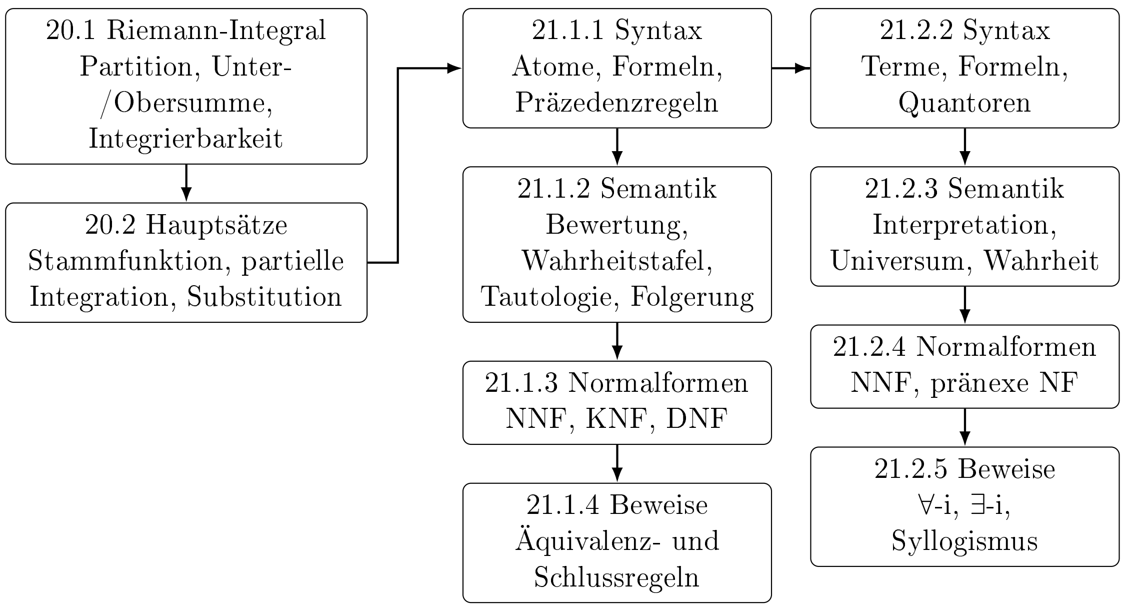
Diese Lektion ist zweigeteilt. Das erste Kapitel schließt den Analysis-Teil des Moduls ab: Es wird das **Riemann-Integral** eingeführt, das die intuitive Vorstellung von Flächeninhalten präzisiert. Anschließend verbindet der erste und zweite **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** das Integrieren mit dem Differenzieren, was die praktische Berechnung von Integralen erst ermöglicht.

Der weitaus umfangreichere zweite Teil führt in die **formale Logik** ein. Die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik sind künstliche Sprachen, die mathematische Sachverhalte ohne Mehrdeutigkeiten ausdrücken. Sie bilden die Grundlage für Anwendungen in der Digitaltechnik, Komplexitätstheorie, Datenbanken und Logikprogrammierung.

Lesen Sie mathematische Texte nie passiv: Vollziehen Sie jeden Schritt nach, konstruieren Sie eigene Beispiele, und prüfen Sie, ob Sie Definitionen aus dem Gedächtnis reproduzieren können – gerade bei der Logik, wo die Präzision der Formulierungen entscheidend ist.

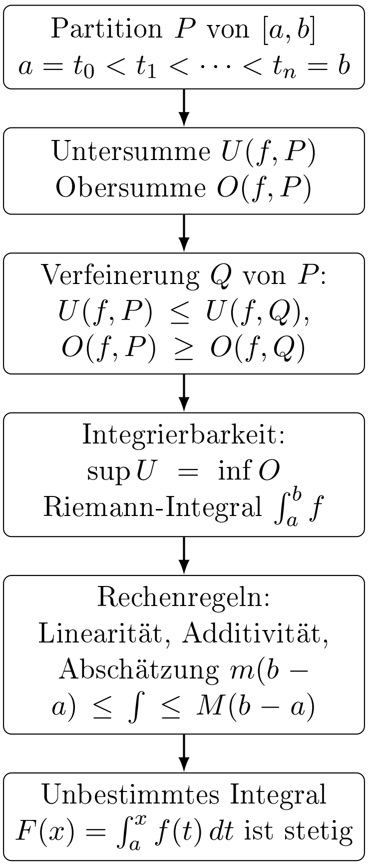
Struktur der Lektion 7

Kapitel 20: Integration | **Kapitel 21: Logik** — **21.1 Aussagenlogik**, **21.2 Prädikatenlogik**



Zielelement 20.1 – Das Riemann-Integral

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Begriff der Partition sowie von Unter- und Obersumme erklären und für konkrete Funktionen berechnen können,
- das Verhalten von Unter-/Obersummen bei Verfeinerungen verstehen (Lemma 20.1.5) und begründen können,
- die Definition der Riemann-Integrierbarkeit (Definition 20.1.7) kennen und die ε-Charakterisierung (Proposition 20.1.9) anwenden können,
- die Rechenregeln der Integration (Linearität, Additivität über Intervalle, Abschätzung) sicher einsetzen können,
- die Stetigkeit des unbestimmten Integrals $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ begründen können (Satz 20.1.14).

Selbstkontrollelement 20.1

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

nach Proposition 20.1.9 integrierbar ist, und bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Zielelement 20.2 – Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Lerninhalte

1. Hauptsatz:
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(c) = f(c)$
(falls f in c stetig)

Stammfunktion
g mit $g' = f$
Korollar: stetig
$\Rightarrow$ integrierbar

2. Hauptsatz:
$\int_a^b f = g(b) - g(a)$

Tabelle der Stammfunktionen
(Polynome, exp, ln, sin, cos, ...)

Partielle Integration
$\int fg' = fg\big|_a^b - \int f'g$

Substitutionsregel
$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den ersten und zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren und beweisen können,
- aus dem ersten Hauptsatz folgern können, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt (Korollar 20.2.4),
- den zweiten Hauptsatz zur Berechnung von Integralen anwenden können, indem Sie eine Stammfunktion bestimmen,
- die Stammfunktionen elementarer Funktionen aus der Tabelle 20.2.7 abrufen und einsetzen können,
- partielle Integration und Substitutionsregel korrekt anwenden können, insbesondere das richtige Identifizieren von f, g bzw. g'.

Selbstkontrollelement 20.2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 xe^x \, dx$ (partielle Integration)

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos(x) \, dx$ (Substitution)

Zielelement 21.1 – Aussagenlogik

Lerninhalte

Syntax:
Atome, Formeln induktiv,
Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$\downarrow$

Präzedenz- und
Klammerregeln

$\downarrow$

Semantik: Bewertung I
Wahrheitstafel,
Tautologie,
Widerspruch, Erfüllbarkeit

$\downarrow$

Semantische Folgerung $\alpha \models \beta$
Logische Äquivalenz $\alpha \approx \beta$

$\downarrow$

Normalformen:
NNF, KNF, DNF

$\downarrow$

Formale Beweise:
Äquivalenz- und
Schlussregeln
(mp, mt, con, simp, add)

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den induktiven Aufbau aussagenlogischer Formeln (Definition 21.1.1) erklären und konkrete Ausdrücke auf ihre Korrektheit prüfen können,
- Präzedenzregeln anwenden und überflüssige Klammern entfernen können,
- einer Formel für eine gegebene Bewertung einen Wahrheitswert zuordnen und vollständige Wahrheitstafeln aufstellen können,
- die Begriffe tautologisch, widerspruchsvoll, erfüllbar und falsifizierbar unterscheiden und anhand von Wahrheitstafeln nachweisen können,
- semantische Folgerung ($\alpha \models \beta$) und logische Äquivalenz ($\alpha \approx \beta$) definieren und die Zusammenhänge aus Bemerkung 21.1.22 kennen,
- die De-Morganschen Gesetze und weitere Äquivalenzregeln (21.1.26) anwenden,
- Formeln in Negationsnormalform, konjunktive und disjunktive Normalform überführen können,

- formale Beweisfolgen mit den Äquivalenz- und Schlussregeln aufstellen können, insbesondere Modus ponens und Modus tollens sicher einsetzen.

Selbstkontrollelement 21.1

Sei $\alpha = (A \to B) \land (B \to C)$.

(a) Stellen Sie die vollständige Wahrheitstafel von α auf.

(b) Ist α eine Tautologie? Begründen Sie.

(c) Leiten Sie mit einer formalen Beweisfolge aus α und der Prämisse A die Formel C her.

(d) Überführen Sie α in KNF.

Zielelement 21.2 – Prädikatenlogik

Lerninhalte

Terme: Variablen V, Konstanten K, Funktionssymbole F

$\downarrow$

Formeln: Prädikate $P(t_1, \ldots, t_n)$, Gleichung $t_1 = t_2$, Junktoren, Quantoren $\forall$, $\exists$

$\downarrow$

Freie / gebundene Variablen
Wirkungsbereich eines Quantors
Konsistente Umbenennung

$\downarrow$

Interpretation (U, I)
Universum, Zuordnung zu Konstanten, Funktionen, Prädikaten

$\downarrow$

Normalformen: NNF, pränexe Normalform (PNF)

$\downarrow$

Formale Beweise: $\forall$-Instantiierung, $\exists$-Instantiierung
Syllogismus (Aristoteles)

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- Terme und prädikatenlogische Formeln induktiv aufbauen und erkennen können,
- freie und gebundene Vorkommen von Variablen in einer Formel bestimmen und den Wirkungsbereich jedes Quantors angeben können,
- eine Formel konsistent umbenennen können (Merkregel 21.2.17),
- einer Formel für eine konkrete Interpretation einen Wahrheitswert zuordnen (Definition 21.2.22),
- die Äquivalenzregeln für Quantoren (Proposition 21.2.32) kennen und anwenden können: Quantorwechsel, Quantortausch, Quantorzusammenfassung,

Quantorelimination, Quantifizierung,

- Formeln in die Negationsnormalform und die pränexe Normalform überführen,
- einfache prädikatenlogische Argumente mit $\forall$-Instantiierung und $\exists$-Instantiierung formal beweisen können.

Selbstkontrollelement 21.2

Sei $\alpha = \forall x \exists y\, P(x, y)$.

(a) Bestimmen Sie für jede der folgenden Interpretationen den Wahrheitswert von α:

(i) $U = \mathbb{N}, \quad I(P) = \{(m, n) \mid m < n\}$.

(ii) $U = \{0\}, \quad I(P) = \emptyset$.

(b) Begründen Sie, warum $\forall x \exists y\, P(x, y)$ im Allgemeinen *nicht* äquivalent zu $\exists y \forall x\, P(x, y)$ ist.

(c) Überführen Sie die Formel $\neg(\forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y))$ in Negationsnormalform.