Glossar zu Lektion 7

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der siebten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

20.1 Das Riemann-Integral

20.1.1 Partition

Sei $a < b$. Eine **Partition** P des Intervalls $[a, b]$ sind endlich viele Punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

20.1.2 Unter- und Obersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $P = (t_0, \dots, t_n)$ eine Partition. Für $1 \leq i \leq n$:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Untersumme: $U(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$. **Obersumme:** $O(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$.
Es gilt stets $U(f, P) \leq O(f, P)$.

20.1.4 Verfeinerung

Eine Partition Q von $[a, b]$ heißt **Verfeinerung** von P, wenn $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq \{t'_0, \dots, t'_m\}$.

20.1.5 Lemma (Verfeinerung)

Sei Q eine Verfeinerung von P. Dann gilt:

$$U(f, P) \leq U(f, Q) \quad \text{und} \quad O(f, P) \geq O(f, Q).$$

Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen.

20.1.6 Proposition

Für beliebige Partitionen P_1, P_2 von $[a, b]$ gilt:

$$U(f, P_1) \leq O(f, P_2).$$

Untersummen sind nie größer als Obersummen.

20.1.7 Riemann-Integral (Definition)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt heißt **integrierbar** auf $[a, b]$, wenn

$$\sup\{U(f, P)\} = \inf\{O(f, P)\}$$

(über alle Partitionen P). Dieser gemeinsame Wert heißt **Riemann-Integral** und wird mit $\displaystyle\int_a^b f$ oder $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

- a: untere Integrationsgrenze; b: obere Integrationsgrenze

- f: Integrand; x: Integrationsvariable (beliebig wählbar)

20.1.9 Proposition (ε-Kriterium)

f ist auf $[a,b]$ integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P gibt mit

$$O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon.$$

20.1.11 Proposition (Additivität)

Sei $a < c < b$. f ist auf $[a,b]$ integrierbar genau dann, wenn f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

20.1.12 Notation (Erweiterung)

Sei f auf $[a,b]$ integrierbar ($a < b$). Es wird gesetzt:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

20.1.13 Lemma (Abschätzung)

Sei f integrierbar auf $[a,b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

20.1.14 Satz (Stetigkeit des unbestimmten Integrals)

Sei f integrierbar auf $[a,b]$. Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ist **stetig** auf $[a,b]$.

20.1.15 Unbestimmtes Integral

Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (mit f integrierbar auf $[a,b]$) heißt **unbestimmtes Integral** von f.

20.1.16 Proposition (Rechenregeln)

1. Sind f, g integrierbar auf $[a,b]$, so ist $f+g$ integrierbar und $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
2. Ist f integrierbar und $c \in \mathbb{R}$, so ist cf integrierbar und $\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$.

20.2 Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

20.2.1 Satz (1. Hauptsatz)

Sei f auf $[a,b]$ integrierbar, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ist f in $c \in [a,b]$ stetig, so ist F in c differenzierbar und

$$F'(c) = f(c).$$

20.2.3 Korollar
Ist f auf $[a,b]$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

20.2.4 Korollar
Ist f auf $[a,b]$ stetig, so besitzt f auf $[a,b]$ eine **Stammfunktion** (d. h. eine differenzierbare Funktion g mit $g' = f$).

20.2.5 Satz (2. Hauptsatz)
Ist f auf $[a,b]$ integrierbar und g irgendeine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Schreibweise: $g(b) - g(a) = \big[g(x)\big]_a^b$.

20.2.7 Merkregel (Stammfunktionen, Auswahl)

$$\begin{array}{lcl}
x^n \ (n \in \mathbb{N}_0) & \rightsquigarrow & \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \\
x^{-1} \ (x > 0) & \rightsquigarrow & \ln x \\
\exp(x) & \rightsquigarrow & \exp(x) \\
\cos x & \rightsquigarrow & \sin x \\
\sin x & \rightsquigarrow & -\cos x \\
\dfrac{1}{1+x^2} & \rightsquigarrow & \arctan x
\end{array}$$

20.2.9 Satz (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit f', g' stetig. Dann:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

20.2.12 Satz (Substitutionsregel)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a,b] \to I$ differenzierbar mit g' stetig. Dann:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Merkregel: Ersetze $u = g(x)$; dann ist $du = g'(x)\,dx$.

20.2.16 Satz
Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist π.

21.1 Aussagenlogik

21.1.1 Syntax

21.1.1 Aussagenlogische Formeln (induktiv)
Sei Σ die Menge der **Atome**. Formeln werden induktiv definiert:

1. Jedes Atom ist eine Formel.
2. Ist α eine Formel, so ist $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3. Für Formeln α, β sind $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Formeln.
4. Nichts sonst ist eine Formel.

21.1.3 Präzedenzregeln

Bindungsstärke (stärker $\to$ schwächer):

$$\neg \succ \land \succ \lor \succ \to \succ \leftrightarrow .$$

$\land$, $\lor$ und $\to$ binden **linksassoziativ**; $\leftrightarrow$ braucht keine Klammerung.

21.1.7 Literal

Ein **Literal** ist ein Atom A (positives Literal) oder ein negiertes Atom $\neg A$ (negatives Literal).

21.1.2 Semantik

21.1.8 Bewertung / Interpretation

Eine Abbildung $I : \Sigma \to \{0, 1\}$ heißt **Bewertung** (oder **Interpretation**). Sie ordnet jedem Atom einen Wahrheitswert zu.

21.1.9 Erweiterung auf Formeln

Die Bewertung I wird auf Formeln erweitert durch:

$$\begin{aligned}
I(\neg\alpha) = 1 \quad &\Leftrightarrow I(\alpha) = 0 \\
I(\alpha \land \beta) = 1 \quad &\Leftrightarrow I(\alpha) = 1 \text{ und } I(\beta) = 1 \\
I(\alpha \lor \beta) = 1 \quad &\Leftrightarrow I(\alpha) = 1 \text{ oder } I(\beta) = 1 \\
I(\alpha \to \beta) = 1 \quad &\Leftrightarrow I(\alpha) = 0 \text{ oder } I(\beta) = 1 \\
I(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \quad &\Leftrightarrow I(\alpha) = I(\beta)
\end{aligned}$$

21.1.16 Erfüllbar, tautologisch, widerspruchsvoll, falsifizierbar

- **erfüllbar**: es gibt eine Bewertung I mit $I(\alpha) = 1$.
- **tautologisch** (allgemeingültig): $I(\alpha) = 1$ für alle I.
- **widerspruchsvoll** (unerfüllbar): $I(\alpha) = 0$ für alle I.
- **falsifizierbar**: es gibt eine Bewertung I mit $I(\alpha) = 0$.

21.1.18 Bemerkung

Äquivalent sind: α ist widerspruchsvoll $\Leftrightarrow$ α ist nicht erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ ist tautologisch.

21.1.19 Semantische Folgerung $\alpha \models \beta$

β folgt semantisch aus α, wenn jede Bewertung, die α wahr macht, auch β wahr macht.

21.1.22 Bemerkung (Charakterisierungen)

1. $\alpha \models \beta \;\Leftrightarrow\; (\alpha \to \beta)$ ist Tautologie.
2. $\alpha \models \beta \;\Leftrightarrow\; (\alpha \wedge \neg\beta)$ ist widerspruchsvoll.
3. α widerspruchsvoll $\;\Leftrightarrow\;$ für alle γ: $\alpha \models \gamma$.

21.1.23 Logische Äquivalenz $\alpha \approx \beta$

α und β heißen **logisch äquivalent**, wenn $I(\alpha) = I(\beta)$ für alle Bewertungen I gilt.
Äquivalent: $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$.

21.1.25 Proposition (Junktor-Minimierung)

Mit nur $\neg$ und $\vee$ lassen sich alle Junktoren ausdrücken:

- $\alpha \to \beta \;\approx\; \neg\alpha \vee \beta$
- $\alpha \wedge \beta \;\approx\; \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta \;\approx\; (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

21.1.26 Proposition (Äquivalenzregeln)

- $\neg\neg\alpha \approx \alpha$ (Negationsregel)
- $\alpha \vee \alpha \approx \alpha,\;\; \alpha \wedge \alpha \approx \alpha$ (Idempotenz)
- $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha,\;\; \alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ (Kommutativität)
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (Assoziativität)
- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ (Distributivität)
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta,\;\; \neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (De Morgan)

21.1.3 Normalformen

21.1.30 Negationsnormalform (NNF)

Eine Formel ohne $\to$ und $\leftrightarrow$ ist in **NNF**, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.
Verfahren: Ersetze $\neg\neg\alpha \to \alpha$, $\neg(\alpha\vee\beta) \to \neg\alpha\wedge\neg\beta$, $\neg(\alpha\wedge\beta) \to \neg\alpha\vee\neg\beta$ (De Morgan).

21.1.34 Klausel

Eine **Klausel** ist eine Disjunktion von Literalen: $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ (alle α_i Literale).
Alle negativ: **negative Klausel**; alle positiv: **positive Klausel**; genau k Literale: k-**Klausel**.

21.1.35 Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Formel ist in **KNF**, wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist.

Verfahren: NNF berechnen, dann Distributivgesetze anwenden: $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \to (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

21.1.38 Monom

Ein **Monom** ist eine Konjunktion von Literalen: $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ (alle α_i Literale).

21.1.39 Disjunktive Normalform (DNF)

Eine Formel ist in **DNF**, wenn sie eine Disjunktion von Monomen ist.
Verfahren: NNF berechnen, dann Distributivgesetze anwenden: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

21.1.4 Formale Beweise

21.1.42 Gültiges Argument

Eine Formel $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ heißt **gültiges Argument**, wenn sie eine Tautologie ist.

21.1.46 Äquivalenzregeln (Tabelle)

Formel	äquivalent zu
$\alpha \vee \beta$	$\beta \vee \alpha$ (com)
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (ass)
$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$	$(\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ (dis)
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ (De Morgan)
$\alpha \to \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$ (imp)
α	$\neg\neg\alpha$ (dn)

(gilt analog für $\wedge$; Regeln wirken in beide Richtungen)

21.1.48 Schlussregeln

Aus	ableitbar	Name
α und $\alpha \to \beta$	β	Modus ponens (mp)
$\alpha \to \beta$ und $\neg\beta$	$\neg\alpha$	Modus tollens (mt)
α und β	$\alpha \wedge \beta$	Konjunktion (con)
$\alpha \wedge \beta$	$\alpha,\ \beta$	Vereinfachung (simp)
α	$\alpha \vee \beta$	Ausdehnung (add)

Schlussregeln wirken nur in eine Richtung.

21.1.53 Proposition (Deduktionsregel)

$\alpha \to (\beta \to \gamma) \;\approx\; (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.
Folge: Um $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to (\beta \to \gamma)$ zu beweisen, genügt es, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta \to \gamma$ herzuleiten.

21.2 Prädikatenlogik

21.2.2 Syntax

21.2.3 Terme (induktiv)

Sei V Variablen, K Konstanten, F Funktionssymbole (paarweise disjunkt). Terme:

1. Jede Variable $x \in V$ ist ein Term.
2. Jede Konstante $a \in K$ ist ein Term.
3. Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und $f \in F$ n-stellig, so ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.

21.2.5 Prädikatenlogische Formeln (induktiv)

Sei R Menge von Prädikatssymbolen. Formeln:

1. $P(t_1, \dots, t_n)$ für $P \in R$ n-stellig und Terme t_i (**Primformel**).
2. $t_1 = t_2$ für Terme t_1, t_2 (Primformel).
3. $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ für Formeln α, β.
4. $\forall x\, \alpha$ und $\exists x\, \alpha$ für Formeln α.

$\alpha \to \beta$ und $\alpha \leftrightarrow \beta$ als Abkürzungen.

21.2.7 Präzedenz

Es gelten die Präzedenzregeln der Aussagenlogik; zusätzlich binden $\forall$ und $\exists$ **stärker** als alle aussagenlogischen Junktoren.

21.2.9 Wirkungsbereich, gebundene Variable

In $\forall x\, \alpha$ und $\exists x\, \alpha$ ist α der **Wirkungsbereich** des Quantors. Der Quantor **bindet** alle freien Vorkommen von x in α (außer solchen, die durch einen inneren Quantor gebunden sind).

21.2.11 Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen von x heißt **frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors mit Variable x liegt, andernfalls **gebunden**.

21.2.14 Geschlossene Formel

Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossene Formel**.

21.2.16/17 Konsistente Umbenennung

Eine Formel ist **konsistent umbenannt**, wenn (1) keine Variable zugleich frei und gebunden vorkommt, und (2) verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen.
Verfahren: Ersetze freie Vorkommen von x durch neue Variable z, falls x auch gebunden vorkommt; benenne Quantoren mit gleichem Namen sukzessive um.

21.2.3 Semantik

21.2.21 Interpretation

Eine **Interpretation** zu einer Signatur $\Sigma = (K, F, R)$ besteht aus

(a) einer nichtleeren Menge U (Universum / Grundbereich),

(b) einer Abbildung I, die jedem Konstantensymbol a ein Element $I(a) \in U$, jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : U^n \to U$ und jedem n-stelligen Prädikatssymbol P eine Relation $I(P) \subseteq U^n$ zuordnet.

21.2.22 Wahrheit einer Formel (Teil 2)

$$\begin{array}{ll} I(\exists x\, \alpha) = 1 & \Leftrightarrow \exists u \in U : I[x/u](\alpha) = 1 \\ I(\forall x\, \alpha) = 1 & \Leftrightarrow \forall u \in U : I[x/u](\alpha) = 1 \\ I(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1 & \Leftrightarrow (I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in I(P) \\ I(t_1 = t_2) = 1 & \Leftrightarrow I(t_1) = I(t_2) \end{array}$$

$I[x/u]$: Interpretation, bei der x durch $u \in U$ ersetzt wird.

21.2.26 Erfüllbar, tautologisch usw. (PL)

Analog zur Aussagenlogik, aber „Bewertung"wird durch „Interpretationërsetzt. **Wichtig:** Die Menge erfüllbarer prädikatenlogischer Formeln ist *nicht entscheidbar.*

21.2.32 Proposition (Äquivalenzregeln für Quantoren)

1. $\neg(\exists x\, \alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$; $\neg(\forall x\, \alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$ *(Quantorwechsel)*
2. $\exists x \exists y\, \alpha \approx \exists y \exists x\, \alpha$; $\forall x \forall y\, \alpha \approx \forall y \forall x\, \alpha$ *(Quantortausch)*
3. $\exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$; $\forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ *(Quantorzusammenfassung)*
4. Ist x nicht frei in α: $\exists x\, \alpha \approx \alpha$; $\forall x\, \alpha \approx \alpha$ *(Quantorelimination)*
5. Ist x nicht frei in β: $\exists x\, \alpha \wedge \beta \approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$; $\forall x\, \alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$ (und analog) *(Quantifizierung)*

Achtung: $\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta \not\approx \forall x(\alpha \vee \beta)$ und $\exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta \not\approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$.

21.2.4 Normalformen

21.2.38 NNF (Prädikatenlogik)

Eine Formel ist in **NNF**, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einer Primformel steht. Zusätzlich zu den aussagenlogischen NNF-Regeln: $\neg(\exists x\, \alpha) \to \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x\, \alpha) \to \exists x(\neg\alpha)$.

21.2.41 Pränexe Normalform (PNF)

Eine Formel ist in **pränexer Normalform**, wenn sie die Gestalt $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, \beta$ hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und β quantorenfrei ist. **Präfix**: die Quantorfolge; **Kern**: β. **Verfahren**: NNF + konsistente Umbenennung + Quantifizierungsregeln anwenden (Quantoren nach außen ziehen).

21.2.5 Formale Beweise

21.2.47 Schlussregeln (PL)

- **$\forall$-Instantiierung ($\forall$-i):** Aus $\forall x\, \alpha$ folgt $\alpha[x/t]$, wobei t ein variablenfreier Term ist.
- **$\exists$-Instantiierung ($\exists$-i):** Aus $\exists x\, \alpha$ folgt $\alpha[x/a]$, wobei a ein *völlig neues* Konstantensymbol ist, das bisher nicht verwendet wurde.

Achtung: Schlussregeln nur auf die gesamte Formel, nicht auf Teilformeln anwenden.

Merkregel (Notation $\alpha[x/t]$)

$\alpha[x/t]$: Die Formel, die aus α entsteht, indem jedes *freie* Vorkommen von x durch den Term t ersetzt wird.