

Studierhinweise zu Lektion 6

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

In dieser Lektion treten Sie in das Herzstück der Analysis ein. Kapitel 17 behandelt *höhere Ableitungen* differenzierbarer Funktionen. Im Mittelpunkt steht der **Mittelwertsatz**, dessen einfacher Beweis weitreichende Folgerungen hat: Er charakterisiert die Exponentialfunktion eindeutig, sichert die Eindeutigkeit der Winkelfunktionen und liefert die *Regel von de l'Hospital* zur Berechnung schwieriger Grenzwerte. Der **Satz von Taylor** erlaubt es, beliebig oft differenzierbare Funktionen durch Polynome zu approximieren und das Restglied explizit abzuschätzen.

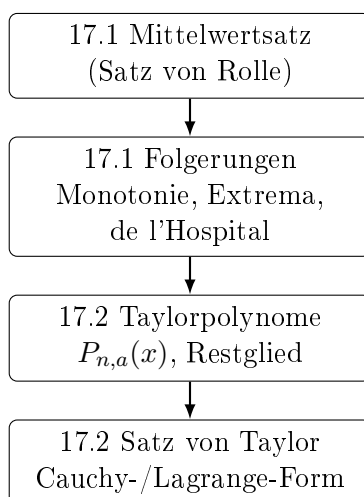
In Kapitel 18 werden **Reihen** als Folgen von Partialsummen eingeführt. Da Grenzwerte von Reihen selten direkt berechenbar sind, stehen *Konvergenzkriterien* im Vordergrund: Majoranten-, Minoranten-, Quotienten-, Wurzel- und Leibniz-Kriterium. Das Konzept der *absoluten Konvergenz* und der *Potenzreihe* führt zu den sogenannten **Summenfunktionen**, die stetig und sogar beliebig oft differenzierbar sind.

Kapitel 19 rundet die Lektion ab, indem Sinus, Cosinus, Tangens, Arcusfunktionen, Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzen als **elementare Funktionen** sauber definiert und untersucht werden – meist über ihre Reihendarstellungen aus Kapitel 18.

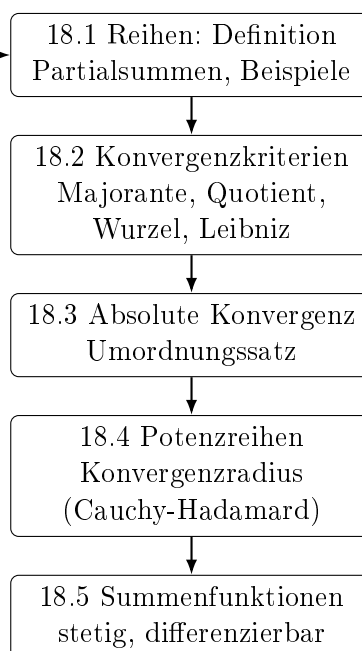
Lesen Sie keinen Satz, ohne ihn verstanden zu haben. Zeichnen Sie Skizzen, rechnen Sie Beispiele nach und lösen Sie die eingebetteten Aufgaben, bevor Sie in die Lösungen schauen.

Struktur der Lektion 6

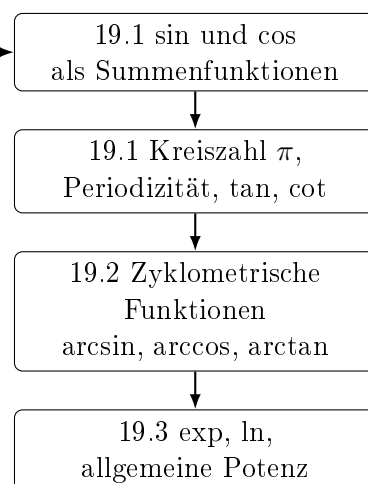
Kapitel 17: Höhere Ableitungen



Kapitel 18: Reihen

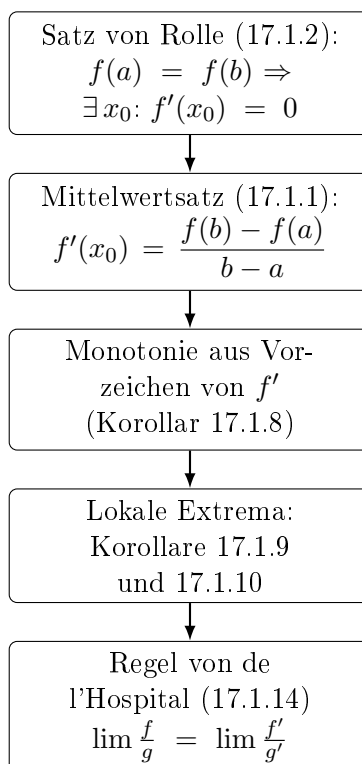


Kapitel 19: Elem. Funktionen



Zielelement 17.1 – Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

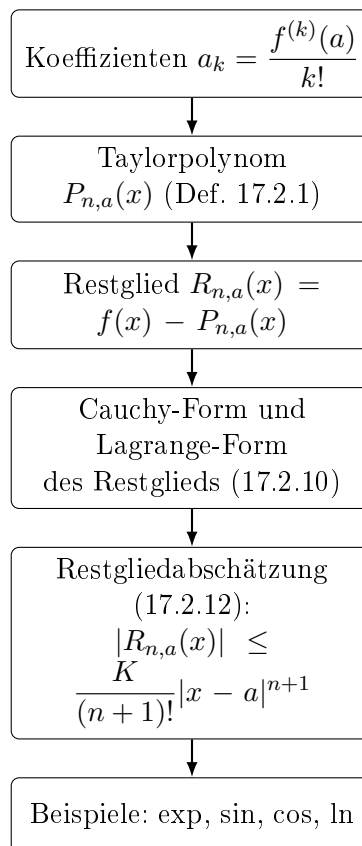
- den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz kennen, geometrisch interpretieren und beweisen können,
- aus dem Vorzeichen von f' auf das Monotonieverhalten von f schließen können (Korollar 17.1.8),
- lokale Extrema mit den Kriterien 17.1.9 und 17.1.10 identifizieren können,
- die Regel von de l'Hospital anwenden können, inklusive des Spezialfalls 17.1.15, und wissen, wann sie *nicht* anwendbar ist,
- die Folgerungen aus dem Mittelwertsatz verstehen: Eindeutigkeit der Exponentialfunktion (17.1.6) und der Winkelfunktionen (17.1.7).

Selbstkontrollelement 17.1

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ mit der Regel von de l'Hospital. Begründen Sie, warum der Spezialfall (Korollar 17.1.15) beim ersten Schritt *nicht* direkt anwendbar ist.

Zielelement 17.2 – Taylorpolynome und Satz von Taylor

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

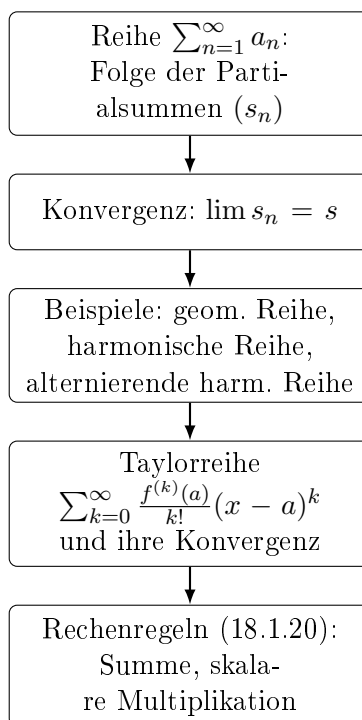
- Taylorpolynome einer Funktion f in einem Entwicklungspunkt a berechnen können,
- die beiden Formen des Restglieds (Cauchy und Lagrange) kennen und im Beweis des Satzes von Taylor einordnen können,
- Restglieder mithilfe von Korollar 17.2.12 abschätzen können,
- verstehen, wann die Taylorentwicklung gegen $f(x)$ konvergiert (Proposition 17.2.14),
- die Taylorpolynome der elementaren Funktionen \exp , \sin , \cos und $\ln(1+x)$ im Entwicklungspunkt 0 angeben können.

Selbstkontrollelement 17.2

Bestimmen Sie das 4. Taylorpolynom $P_{4,0}$ von $f(x) = \cos(x)$ im Entwicklungspunkt $a = 0$ und geben Sie eine Abschätzung für das Restglied $|R_{4,0}(x)|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Zielelement 18.1 – Reihen: Grundlagen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

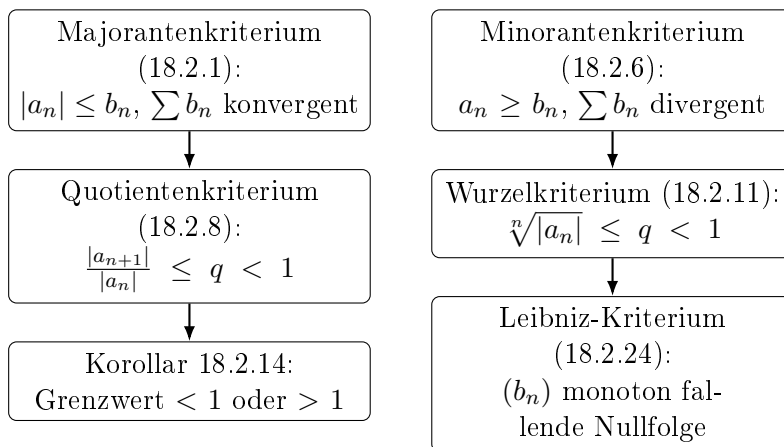
- den Begriff der Reihe als Folge von Partialsummen erklären können,
- wissen, dass aus der Konvergenz einer Reihe folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist (Proposition 18.1.16), und das Umgekehrte widerlegen können,
- die geometrische Reihe kennen und für $|q| < 1$ ihren Grenzwert angeben,
- den Zusammenhang zwischen Taylorreihe und Restglied kennen (Proposition 18.1.11),
- Exponential-, Logarithmus- und alternierende harmonische Reihe als Taylorreihen einordnen.

Selbstkontrollelement 18.1

Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ gilt, indem Sie die Partialsummen explizit berechnen (Hinweis: Partialbruchzerlegung $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

Zielelement 18.2 – Konvergenzkriterien für Reihen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

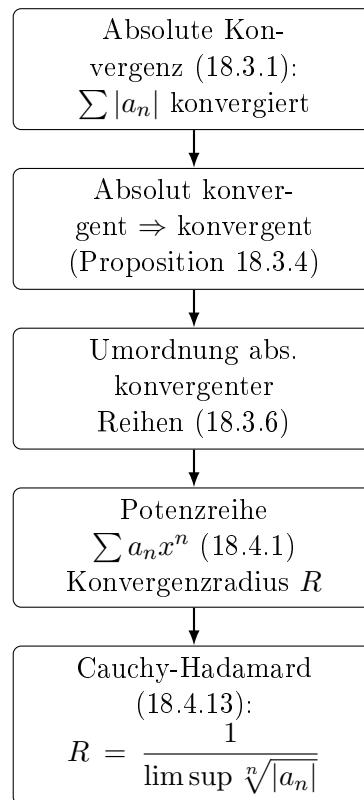
- die fünf Konvergenzkriterien (Majorante, Minorante, Quotient, Wurzel, Leibniz) kennen, deren Voraussetzungen prüfen und anwenden können,
- wissen, warum $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle n noch keine Konvergenz garantiert (Gegenbeispiel: harmonische Reihe),
- das handliche Korollar 18.2.14 (Grenzwert von Quotienten- oder Wurzelfolge) kennen und einsetzen können,
- Cosinusreihe, Sinusreihe und Binomialreihe mit dem Quotientenkriterium auf Konvergenz untersuchen können.

Selbstkontrollelement 18.2

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ mit dem Quotientenkriterium (Korollar 18.2.14) auf Konvergenz.

Zielelement 18.3–18.4 – Absolute Konvergenz und Potenzreihen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

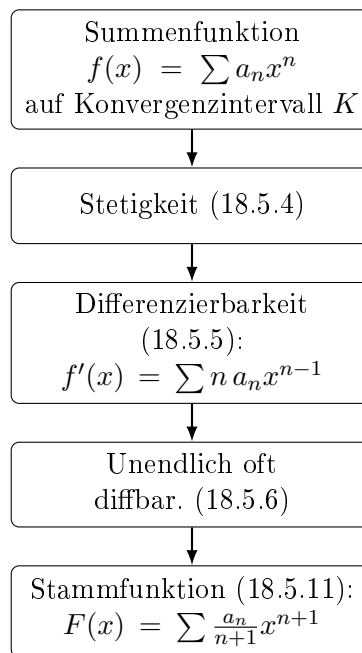
- den Begriff der absoluten Konvergenz erklären und von der bloßen Konvergenz abgrenzen können,
- den Umordnungssatz (18.3.6) und den Satz von Riemann (18.3.7) kennen und einordnen können,
- den Begriff des Konvergenzradius verstehen: für $|x| < R$ absolute Konvergenz, für $|x| > R$ Divergenz (Proposition 18.4.7),
- den Satz von Cauchy-Hadamard anwenden können,
- die Konvergenzradien der wichtigsten Potenzreihen (Tabelle 18.5.1) kennen.

Selbstkontrollelement 18.3–18.4

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mit dem Satz von Cauchy-Hadamard.

Zielelement 18.5 – Summenfunktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

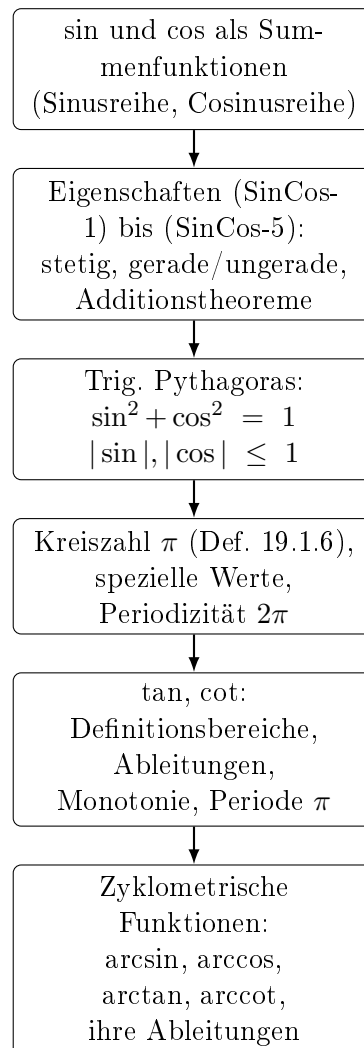
- wissen, dass Summenfunktionen stetig und unendlich oft differenzierbar sind,
- die gliedweise Differentiation einer Potenzreihe anwenden können,
- verstehen, dass jede Potenzreihe die Taylorreihe ihrer Summenfunktion ist (Korollar 18.5.8),
- eine Stammfunktion einer Summenfunktion durch gliedweise Integration bestimmen können (18.5.11),
- die Logarithmusreihe und die Binomialreihe mithilfe dieser Methoden auf ganz $(-1, 1)$ ausdehnen (Propositions 18.5.12 und 18.5.14).

Selbstkontrollelement 18.5

Zeigen Sie durch gliedweise Differentiation der Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, dass $\exp' = \exp$ gilt.

Zielelement 19.1–19.2 – Trigonometrische und zyklometrische Funktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

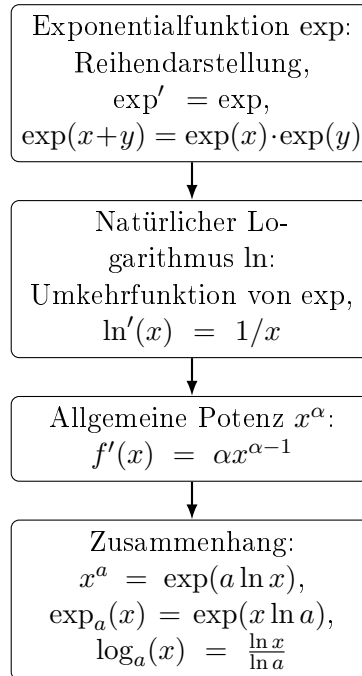
- Sinus und Cosinus über ihre Reihendarstellungen definieren und die Eigenschaften aus Satz 19.1.11 vollständig kennen,
- die Kreiszahl π als Nullstelle des Cosinus definieren und die speziellen Funktionswerte auswendig kennen,
- die Additionstheoreme und den trigonometrischen Pythagoras anwenden,
- Tangens und Cotangens als Quotienten erklären, ihre Ableitungen herleiten und die Periodizität begründen können,
- die zyklometrischen Funktionen als Umkehrfunktionen auf geeigneten Intervallen erklären und ihre Ableitungen kennen ($\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$).

Selbstkontrollelement 19.1–19.2

Beweisen Sie $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ mithilfe der Additionstheoreme und bestimmen Sie anschließend $\arctan(1)$ und $\arctan(-1)$.

Zielelement 19.3 – Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die Exponentialfunktion über ihre Reihendarstellung definieren und die Eigenschaften aus Satz 19.3.1 kennen,
- den natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion von exp erklären, seine Reihendarstellung und Ableitungsregel $\ln'(x) = 1/x$ kennen,
- die allgemeine Potenz x^α für $\alpha \in \mathbb{R}$ verstehen und die Ableitungsregel anwenden können,
- den Zusammenhang zwischen allgemeiner Potenz, Exponentialfunktion und Logarithmus zur Basis a aus Proposition 19.3.4 kennen.

Selbstkontrollelement 19.3

Berechnen Sie $\frac{d}{dx} x^\pi$ und $\frac{d}{dx} \pi^x$ für $x > 0$, wobei π die Kreiszahl ist. Erklären Sie den Unterschied zwischen x^π (allgemeine Potenz) und π^x (Exponentialfunktion zur Basis π).