Glossar zu Lektion 6

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der sechsten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

17 Höhere Ableitungen

17.0.1 Definition (k-te Ableitung)

Sei f eine Funktion. Wenn $f^{(k)}(a)$ für ein $k \geq 1$ existiert, so heißt f in a **k-mal differenzierbar**, und $f^{(k)}(a)$ wird **k-te Ableitung von f in a** genannt. Es gilt $f^{(1)} = f'$ und $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

17.1 Der Mittelwertsatz

17.1.2 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

17.1.1 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrische Interpretation: Es gibt einen Punkt, in dem die Tangente parallel zur Sekante liegt.

17.1.3 Korollar

Sei $g_1' = g_2'$ auf dem Intervall I. Dann gilt $g_1 = g_2 + \hat{c}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.
Merkregel: Zwei Funktionen mit gleicher Ableitung unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

17.1.5/6 Korollar (Charakterisierung der e-Funktion)

Ist f differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle x, so gilt $f = c \cdot \exp$. Insbesondere ist exp die *einzige* differenzierbare Funktion mit $f = f'$ und $f(0) = 1$.

17.1.8 Korollar (Monotonie und Ableitung)

Sei f stetig auf I und differenzierbar im Inneren.

- $f' \geq 0 \;\Rightarrow\; f$ wächst; $\quad f' > 0 \;\Rightarrow\; f$ wächst streng monoton.
- $f' \leq 0 \;\Rightarrow\; f$ fällt; $\quad f' < 0 \;\Rightarrow\; f$ fällt streng monoton.

17.1.9 Korollar (Lokale Extrema, Vorzeichenwechsel)

Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' in x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$ (bzw. $-$ nach $+$), so ist x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

17.1.10 Korollar (Lokale Extrema, zweite Ableitung)

Ist $f'(x_0) = 0$ und f'' existiert in x_0, so gilt:

- $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ ist lokales Maximum.
- $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ ist lokales Minimum.
- $f''(x_0) = 0$: keine Aussage möglich.

17.1.13 Proposition (Verallg. Mittelwertsatz)

Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0).$$

17.1.14 Satz (Regel von de l'Hospital)

Sei $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ auf $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$. Falls $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Achtung: Die Regel darf nur angewendet werden, wenn Zähler und Nenner gegen 0 streben. Der Spezialfall (17.1.15) gilt, wenn g' stetig ist und $g'(a) \neq 0$.

17.2 Taylorpolynome und Satz von Taylor

17.2.1 Definition (Taylorpolynom)

Sei f eine Funktion, für die $f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existieren. Das n**-te Taylorpolynom von f in a** ist

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Wichtige Beispiele (Entwicklungspunkt $a = 0$):

- exp: $P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
- sin: $P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- cos: $P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\ln(1+x)$: $P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

17.2.7 Definition (Restglied)

$R_{n,a}(x) := f(x) - P_{n,a}(x)$ heißt **Restglied**.

17.2.8/9 Satz von Taylor

Seien $f', \ldots, f^{(n+1)}$ auf einem Intervall I mit $a \in I$ definiert. Dann gibt es $t_0, t_1 \in [a, x]$ (oder $[x, a]$) mit:

- **Cauchy-Form:** $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x - t_1)^n (x - a)$
- **Lagrange-Form:** $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$

17.2.12 Korollar (Restgliedabschätzung)

Gilt $|f^{(n+1)}(t)| \leq K$ für alle $t \in I$, so folgt

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} \quad \text{für alle } x \in I.$$

17.2.13 Lemma

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

17.2.14 Proposition

Gilt $|f^{(n)}(t)| \leq \alpha K^n$ für alle $t \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge, und die Taylorreihe konvergiert gegen $f(x)$.

18 Reihen

18.1 Definitionen, Beispiele, erste Eigenschaften

18.1.1 Definition (Reihe)

Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ heißt **Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. Die s_n heißen **Partialsummen**.

18.1.2 Definition (Konvergenz)

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt **konvergent**, wenn die Folge (s_n) konvergiert. Ihr Grenzwert wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. **Achtung:** Das Symbol $\sum a_n$ bezeichnet sowohl die Folge der Partialsummen als auch (bei Konvergenz) deren Grenzwert.

18.1.6 Definition (Harmonische Reihe)

$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ heißt **harmonische Reihe**. Sie ist divergent.

18.1.7/8/9 Geometrische Reihe

$\displaystyle\sum_{n=0}^\infty q^n$ heißt **geometrische Reihe**. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Konvergenz: Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, und ihr Grenzwert ist $\dfrac{1}{1-q}$.

18.1.10 Definition (Taylorreihe)

Sei f auf I unendlich oft differenzierbar, $a \in I$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ heißt **Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt** a.

18.1.11 Proposition

Die Taylorreihe konvergiert genau dann gegen $f(x)$, wenn die Folge der Restglieder $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge ist.

18.1.13 Definition (Exponentialreihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ heißt **Exponentialreihe**.

18.1.14/15 Logarithmusreihe / Alternierende harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ heißt **Logarithmusreihe**; sie konvergiert für $x \in (-1, 1]$ gegen $\ln(1+x)$. Für $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (**alternierende harmonische Reihe**).

18.1.16 Proposition

Ist $\sum a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge (und die Folge der Partialsummen beschränkt). **Umkehrung gilt nicht!** (Gegenbeispiel: harmonische Reihe.)

18.1.19 Proposition (Cauchy-Kriterium für Reihen)

$\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$.

18.1.20 Proposition (Rechenregeln)

Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent, so gilt: $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ und $\sum c a_n = c \sum a_n$.

18.2 Konvergenzkriterien

18.2.1 Satz (Majorantenkriterium)

Gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle n und konvergiert $\sum b_n$, so konvergieren auch $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$, und $|\sum a_n| \leq \sum b_n$.

18.2.6 Korollar (Minorantenkriterium)

Gilt fast immer $a_n \geq b_n \geq 0$ und divergiert $\sum b_n$, so divergiert auch $\sum a_n$.

18.2.8 Satz (Quotientenkriterium)

Gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$ fast immer, so konvergieren $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$. Gilt fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so divergiert $\sum a_n$. **Achtung:** $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle n ohne festes q reicht nicht für Konvergenz.

18.2.11 Satz (Wurzelkriterium)

Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ fast immer, so konvergieren $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$. Gilt fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so sind $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$ divergent.

18.2.14 Korollar

Konvergiert die Wurzelfolge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ oder die Quotientenfolge $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ gegen α, so gilt:

- $\alpha < 1 \;\Rightarrow\; \sum a_n$ absolut konvergent.
- $\alpha > 1 \;\Rightarrow\; \sum a_n$ divergent.
- $\alpha = 1 \;\Rightarrow\;$ keine Aussage möglich.

18.2.17/18 Definition (Cosinus- und Sinusreihe)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ heißt **Cosinusreihe**, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ heißt **Sinusreihe**. Beide konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

18.2.19/20 Definition (Binomialreihe)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ heißt **Binomialreihe**.

18.2.21/22 Proposition (Binomialreihe)

Für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ konvergiert die Binomialreihe für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für alle $x \in [0, 1)$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^\alpha$.

18.2.24 Satz (Leibniz-Kriterium)

Ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge (mit $b_n \geq 0$), so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$.

18.3 Absolute Konvergenz

18.3.1 Definition (Absolute Konvergenz)

$\sum a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

18.3.4 Proposition

Absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent. Die Umkehrung gilt nicht (Gegenbeispiel: alternierende harmonische Reihe).

18.3.5/6 Definition / Satz (Umordnung)

Ist $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\sum a_{\pi(n)}$ **Umordnung** von $\sum a_n$. Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, so konvergiert jede Umordnung, und $\sum a_{\pi(n)} = \sum a_n$.

18.3.7 Satz (Umordnungssatz von Riemann)

Ist $\sum a_n$ konvergent aber *nicht* absolut konvergent, so gibt es zu jeder reellen Zahl c eine Umordnung mit Grenzwert c, und auch divergente Umordnungen.

18.4 Potenzreihen

18.4.1 Definition (Potenzreihe)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ heißt **Potenzreihe** mit Mittelpunkt a und Koeffizienten a_n. Ohne Einschränkung betrachtet man meist Potenzreihen mit Mittelpunkt 0: $\sum a_n x^n$.

18.4.4 Definition (Konvergenzradius)

Sei $M = \{x \geq 0 \mid \sum a_n x^n \text{ konvergiert}\}$. Ist M beschränkt, so heißt $R = \sup M$ der **Konvergenzradius**. Ist M unbeschränkt, so setzt man $R = \infty$.

18.4.7 Proposition

Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R konvergiert für alle $|x| < R$ absolut und divergiert für alle $|x| > R$.

18.4.8 Definition (Konvergenzintervall)

Das Intervall $(-R, R)$ heißt **Konvergenzintervall** (für $R = \infty$: ganz $\mathbb{R}$).

18.4.9/11 Definition (Häufungswert, Limes superior/inferior)

α heißt **Häufungswert** von (a_n), wenn in jeder ε-Umgebung von α unendlich viele Folgenglieder liegen. **Limes superior** $\limsup a_n$: größter Häufungswert; **Limes inferior** $\liminf a_n$: kleinster Häufungswert. Für konvergente Folgen: $\liminf a_n = \lim a_n = \limsup a_n$.

18.4.13 Satz (Cauchy-Hadamard)

Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe.

- Ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0$, so gilt $R = \dfrac{1}{a}$.
- Ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so gilt $R = \infty$.
- Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, so gilt $R = 0$.

18.5.1 Tabelle (Konvergente Reihen)

Bezeichnung	Definition	Konvergenzradius
Binomialreihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$R = 1$ $(\alpha \notin \mathbb{N}_0)$
Exponentialreihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = \infty$
Logarithmusreihe	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
Geometrische R.	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$
Sinusreihe	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = \infty$
Cosinusreihe	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = \infty$

18.5 Potenzreihen und Summenfunktionen

18.5.2 Definition (Summenfunktion)

Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Konvergenzintervall K. Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt zugehörige **Summenfunktion**.

18.5.4 Satz (Stetigkeit)

Summenfunktionen sind stetig auf ihrem Konvergenzintervall.

18.5.5 Satz (Differenzierbarkeit)

Summenfunktionen sind differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Die Potenzreihen $\sum a_n x^n$ und $\sum n\, a_n x^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius. **Merkregel:** Gliedweise Differentiation ist erlaubt.

18.5.6/8 Korollar

Summenfunktionen sind unendlich oft differenzierbar. Jede Potenzreihe ist die Taylorentwicklung ihrer Summenfunktion im Entwicklungspunkt 0.

18.5.9/11 Stammfunktion

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** zu f auf I, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Eine Stammfunktion der Summenfunktion $f(x) = \sum a_n x^n$ ist $F(x) = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

19 Elementare Funktionen

19.1 Trigonometrische Funktionen

19.1.1 Satz (Existenz der Winkelfunktionen)

Die durch die Reihendarstellungen definierten Funktionen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

erfüllen die Eigenschaften (SinCos-1) bis (SinCos-5): Stetigkeit, Ungerade-/ Geradeheit, Additionstheoreme, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\cos(0) = 1$.

19.1.2 Korollar (Trig. Pythagoras)

Für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

19.1.3 Korollar (Beschränktheit)

Für alle $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

19.1.6 Definition (Kreiszahl π)

Die einzige Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Die Zahl π heißt **Kreiszahl** ($\pi \approx 3{,}14159\ldots$).

19.1.11 Satz (Sinus und Cosinus, Zusammenfassung)

Ableitungen: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
Spezielle Werte: $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.
Bildbereich: $[-1, 1]$.
Periodizität: kleinste positive Periode 2π.
Nullstellen: $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für sin; $\{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für cos.

19.1.12 Definition (Tangens und Cotangens)

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

19.1.13 Satz (Tangens und Cotangens)

Ableitungen: $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$; $\cot'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$.
Bildbereich: $\mathbb{R}$ für beide.

Periodizität: kleinste positive Periode π.
Monotonie: tan wächst streng auf $((k-\frac{1}{2})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi)$; cot fällt streng auf $(k\pi,(k+1)\pi)$.

19.2 Zyklometrische Funktionen

19.2.1 Definition (Zyklometrische Funktionen)

- $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$: Umkehrung von $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$
- $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$: Umkehrung von $\cos|_{[0,\pi]}$
- $\arctan:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: Umkehrung von $\tan|_{(-\pi/2,\pi/2)}$
- $\operatorname{arccot}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$: Umkehrung von $\cot|_{(0,\pi)}$

Es gilt: $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$ und $\operatorname{arccot}(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$.

19.2.3 Satz (Ableitungen der zyklometrischen Funktionen)

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(x\in(-1,1)),\qquad \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad(x\in\mathbb{R}).$$

Spezielle Werte: $\arcsin(0)=0$, $\arcsin(\pm1)=\pm\frac{\pi}{2}$, $\arctan(0)=0$, $\arctan(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}$.

19.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz

19.3.1 Satz (Exponentialfunktion)

$\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $\exp(x)=e^x$. Reihendarstellung: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Ableitung: $\exp'=\exp$. Spezielle Werte: $\exp(0)=1$, $\exp(1)=e$. Streng monoton wachsend. Wichtige Gleichung: $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$.

19.3.2 Satz (Natürlicher Logarithmus)

$\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, Umkehrfunktion von exp. Reihendarstellung: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ für $|x|<1$. Ableitung: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Streng monoton wachsend. Gleichungen: $\ln(xy)=\ln x+\ln y$, $\ln(x^\alpha)=\alpha\ln x$.

19.3.3 Satz (Allgemeine Potenz)

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ für $\alpha\in\mathbb{R}$. Reihendarstellung: $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ für $|x|<1$. Ableitung: $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

19.3.4 Proposition

Sei $a>0$. Dann gilt: $x^a=\exp(a\ln x)$; $\quad a^x=\exp(x\ln a)$; $\quad \log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ (für $a\neq1$).