

Einsendaufgaben – Lektion 6

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 6.1

Sei $x > 0$ beliebig. Wir definieren

$$f: [0, x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}.$$

Die Ableitung von f ist:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{\sqrt{1+t} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}}{1+t} = \frac{1 - \sqrt{1+t} - t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}}{1+t}.$$

Für alle $t > 0$ gilt $f'(t) < 0$, da der Nenner von $f'(t)$ immer positiv ist und der Zähler wegen $\sqrt{1+t} > 1$ immer negativ ist.

Da $x > 0$, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $t \in (0, x)$ mit

$$f'(t) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Mit $f'(t) < 0$ folgt:

$$0 > f'(t) = \frac{f(x)}{x}.$$

Da $x > 0$ gilt, folgt:

$$0 > f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Nach Umstellung gilt:

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}. \quad \square$$