

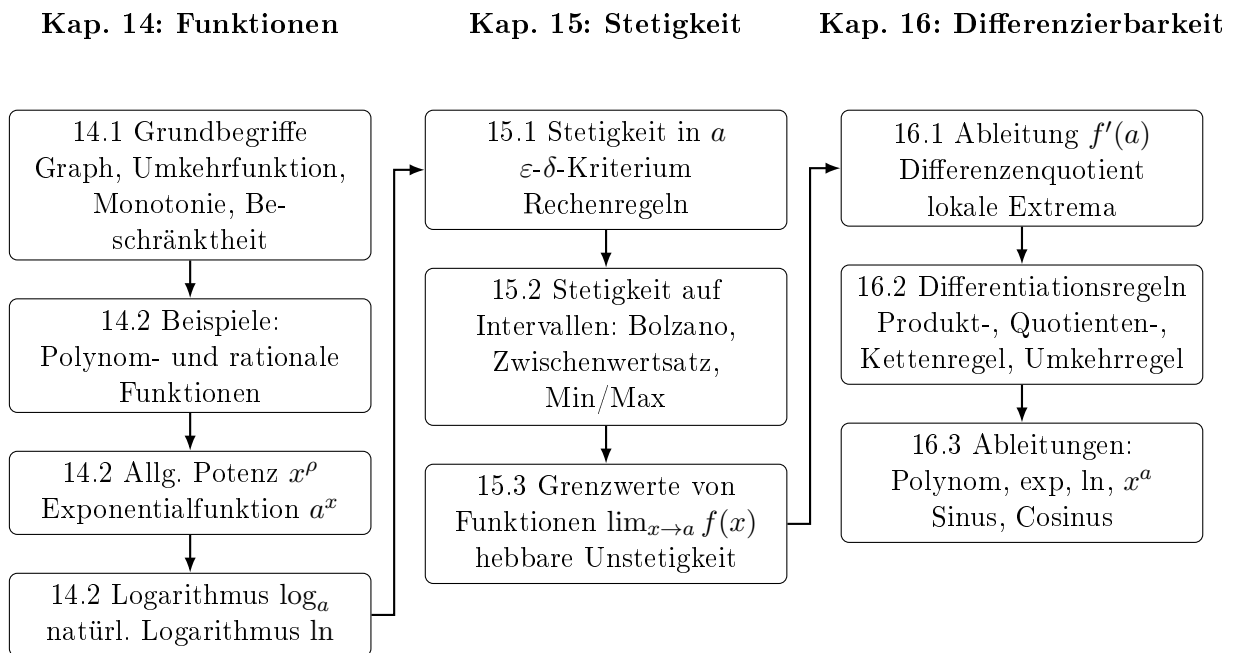
Studierhinweise zu Lektion 5

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Diese Lektion widmet sich dem zentralen Anliegen der reellen Analysis: der Untersuchung von Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. In Kapitel 14 werden Grundbegriffe für Funktionen eingeführt (Monotonie, Umkehrfunktion, Beschränktheit) und wichtige Beispiellklassen vorgestellt – Polynomfunktionen, rationale Funktionen, allgemeine Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion. Kapitel 15 führt den Begriff der *Stetigkeit* ein: Eine stetige Funktion reagiert auf kleine Änderungen des Arguments nur mit kleinen Änderungen des Funktionswerts. Sie lernen das ε - δ -Kriterium sowie die Sätze von Bolzano (Nullstellensatz und Zwischenwertsatz) kennen. Kapitel 16 behandelt die *Differenzierbarkeit*: Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten, so nennen wir ihn die Ableitung und interpretieren ihn als Steigung der Tangente. Die Differentiationsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) ermöglichen das Ableiten aller in der Praxis auftretenden Funktionen.

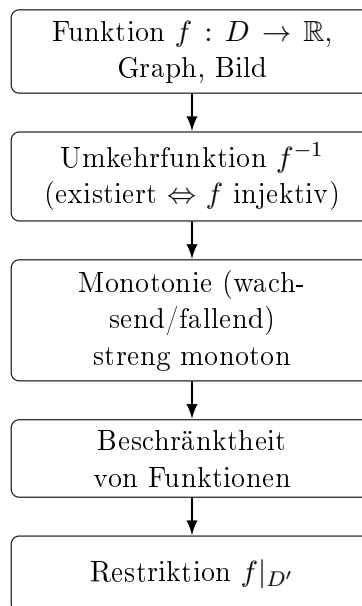
Lesen Sie den Text aktiv – rechnen Sie Beweise nach, arbeiten Sie die Aufgaben selbst durch, und stellen Sie sich bei jeder Definition ein konkretes Beispiel vor.

Struktur der Lektion 5



Zielelement 14.1 – Grundbegriffe für Funktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

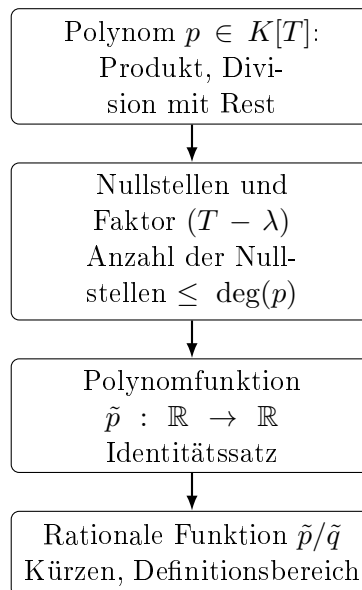
- den Unterschied zwischen dem Analysis- und dem Lineare-Algebra-Begriff der Komposition kennen (Bild von f muss Teilmenge des Definitionsbereichs von g sein, nicht gleich),
- erklären können, wann eine Umkehrfunktion existiert, und den Graphen von f^{-1} durch Spiegelung an der Diagonale $d = \{(z, z)\}$ konstruieren,
- die Begriffe monoton wachsend, streng monoton fallend usw. an Beispielen überprüfen und Proposition 14.1.11 (streng monotone Funktionen sind injektiv) anwenden können,
- beschränkte Funktionen erkennen und algebraische Verknüpfungen beschränkter Funktionen auf Beschränktheit untersuchen.

Selbstkontrollelement 14.1

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und beschreiben Sie, wie man den Graphen von f^{-1} aus dem Graphen von f erhält.

Zielelement 14.2a – Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

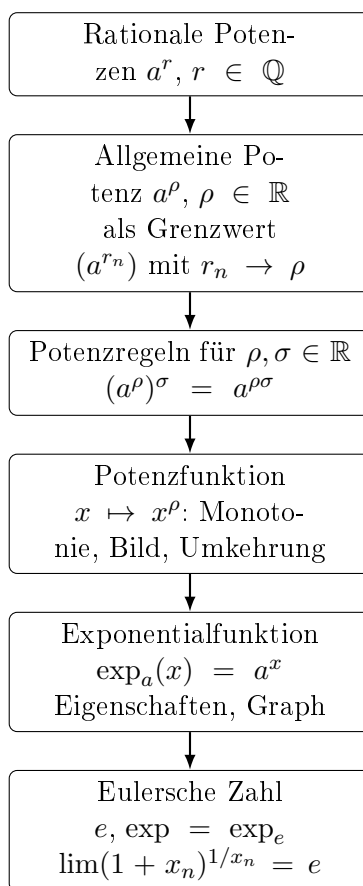
- Polynome in $K[T]$ multiplizieren und mit Rest dividieren können,
- Proposition 14.2.8 (Nullstellen \Leftrightarrow Teiler $(T - \lambda)$) und Korollar 14.2.9 (höchstens n Nullstellen) kennen und anwenden,
- den Identitätssatz (Satz 14.2.13) formulieren: Stimmen zwei Polynomfunktionen in mehr als $\max(\deg p, \deg q)$ Punkten überein, so sind die Polynome gleich,
- rationale Funktionen kürzen und ihren Definitionsbereich bestimmen.

Selbstkontrollelement 14.2a

Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ eine Nullstelle von $p = T^3 - 6T + 4$ ist, und geben Sie die Division $p = (T - 2) \cdot q + r$ explizit an.

Zielelement 14.2b – Allgemeine Potenz und Exponentialfunktion

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

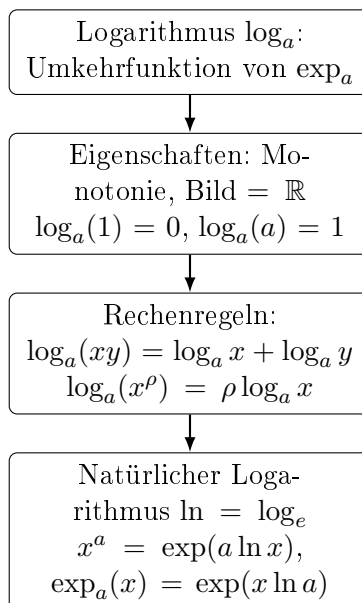
- erklären können, wie a^ρ für irrationales ρ als Grenzwert einer Folge mit rationalen Exponenten definiert wird,
- die fünf Potenzregeln (Satz 14.2.32) auswendig kennen und anwenden,
- die Monotonieeigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion (Proposition 14.2.25) und der Exponentialfunktion (Satz 14.2.35) kennen,
- den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e$ (Satz 14.2.39) anwenden.

Selbstkontrollelement 14.2b

Berechnen Sie 2^π schrittweise: Geben Sie eine Folge rationaler Zahlen (r_n) mit $r_n \rightarrow \pi$ an und erläutern Sie, warum (2^{r_n}) konvergiert.

Zielelement 14.2c – Logarithmus

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

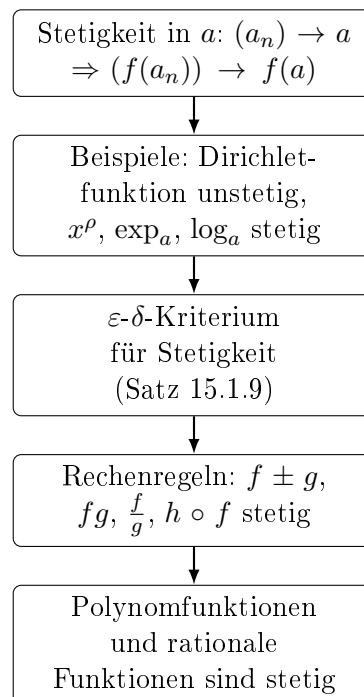
- den Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definieren können,
- die Eigenschaften des Logarithmus (Satz 14.2.42) kennen und einsetzen können,
- die Rechenregeln für den Logarithmus sicher anwenden (insbesondere die Logarithmusgesetze für Produkte, Quotienten und Potenzen),
- $\log_a(x)$, $\exp_a(x)$ und die allgemeine Potenzfunktion durch \exp und \ln ausdrücken können (Proposition 14.2.44).

Selbstkontrollelement 14.2c

Berechnen Sie $\log_2(8)$ und vereinfachen Sie $\log_a(a^3 \cdot \sqrt{a})$ so weit wie möglich.

Zielelement 15.1 – Stetigkeit: Grundlagen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

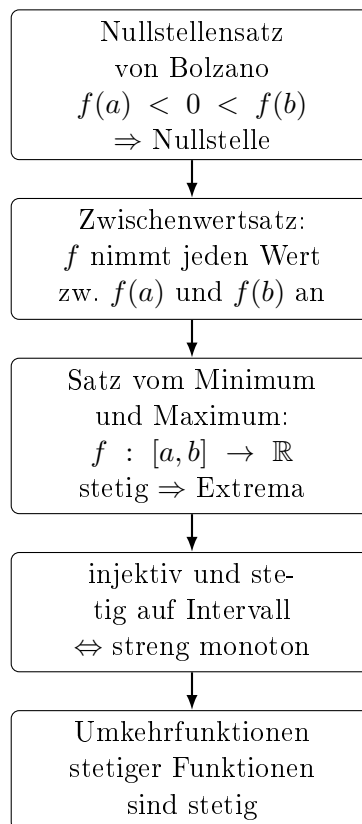
- die Folgendefinition der Stetigkeit (Definition 15.1.1) und das ε - δ -Kriterium (Satz 15.1.9) formulieren und ineinander überführen können,
- die Äquivalenz beider Formulierungen beweisen können,
- die Rechenregeln für stetige Funktionen (Proposition 15.1.11) anwenden,
- konkrete Funktionen auf Stetigkeit oder Unstetigkeit prüfen (inkl. Dirichletfunktion und Größte-Ganze-Funktion).

Selbstkontrollelement 15.1

Beweisen Sie mit dem ε - δ -Kriterium, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$, stetig ist.

Zielelement 15.2 – Stetige Funktionen auf Intervallen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

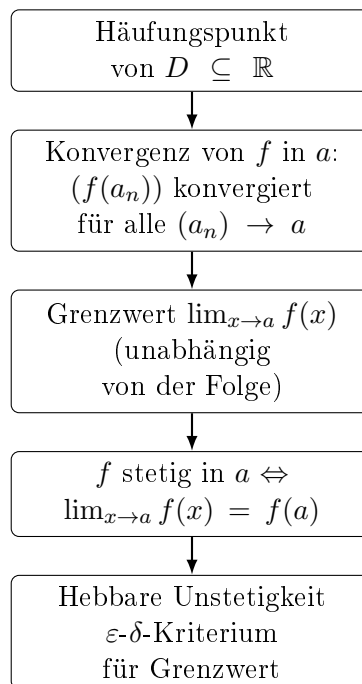
- den Nullstellensatz und den Zwischenwertsatz von Bolzano formulieren und beweisen können,
- den Satz vom Minimum und Maximum (Korollar 15.2.9) kennen und anwenden,
- das Lemma 15.2.10 (stetig und injektiv auf $[a, b] \Rightarrow$ streng monoton) kennen sowie dessen Beweis und Konsequenzen verstehen,
- erklären, warum die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall stetigen und injektiven Funktion ebenfalls stetig ist (Proposition 15.2.14).

Selbstkontrollelement 15.2

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = -1$ und $f(1) = 3$. Welche Aussage liefert der Zwischenwertsatz? Welche Werte nimmt f garantiert an?

Zielelement 15.3 – Grenzwerte von Funktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

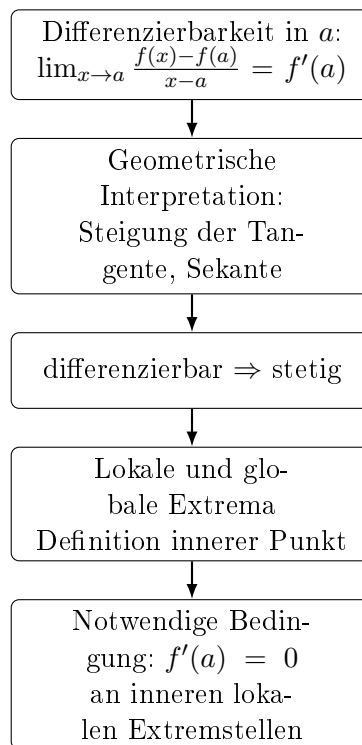
- den Begriff des Häufungspunkts und die Definition der Konvergenz einer Funktion in einem Punkt (Definition 15.3.4) erklären können,
- den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und dem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (Proposition 15.3.9) kennen,
- das ε - δ -Kriterium für Funktionengrenzwerte (Satz 15.3.15) anwenden und hebbare Unstetigkeiten erkennen und beheben können,
- die Rechenregeln für Funktionenkonvergenz (Proposition 15.3.17) anwenden.

Selbstkontrollelement 15.3

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ und erklären Sie, ob die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ eine hebbare Unstetigkeit in $x = 2$ besitzt.

Zielelement 16.1 – Die Ableitung einer Funktion

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

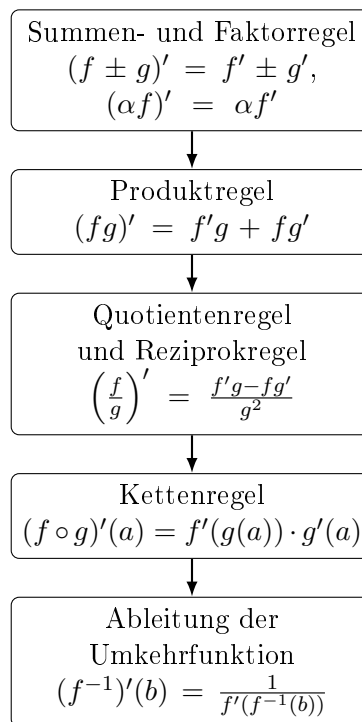
- die Definition der Differenzierbarkeit (Definition 16.1.1) durch den Grenzwert des Differenzenquotienten formulieren und den geometrischen Zusammenhang mit der Tangente erklären können,
- beweisen können, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert (Proposition 16.1.3),
- lokale und globale Extrema definieren und die notwendige Bedingung $f'(a) = 0$ an inneren Extremstellen (Proposition 16.1.12) kennen und anwenden können.

Selbstkontrollelement 16.1

Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass $f(x) = x^2$ in $a = 3$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(3)$.

Zielelement 16.2 – Differentiationsregeln

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

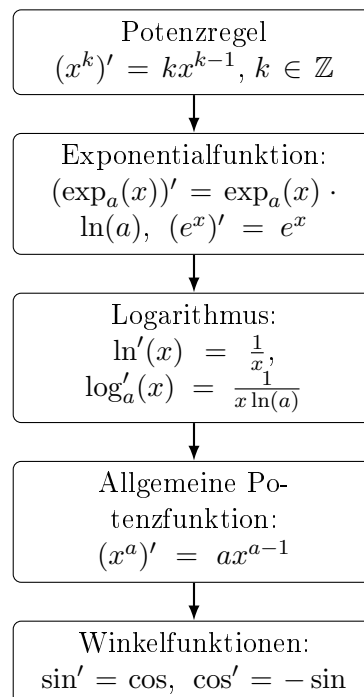
- alle Differentiationsregeln (Proposition 16.2.1) auswendig kennen und beherrschen – Summe, Produkt, Quotient, Faktor,
- die Kettenregel (Satz 16.2.3) sicher anwenden können, auch bei mehrfach verschachtelten Kompositionen,
- die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Proposition 16.2.4) kennen und geometrisch interpretieren können.

Selbstkontrollelement 16.2

Leiten Sie $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ mit der Quotientenregel ab und $g(x) = (x^3 + 1)^5$ mit der Kettenregel.

Zielelement 16.3 – Ableitungen wichtiger Funktionen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- alle Standard-Ableitungsregeln auswendig wissen: Potenzregel für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}$, Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus, Sinus und Cosinus,
- Ableitungen zusammengesetzter Funktionen durch Kombination der Differentiationsregeln mit diesen Grundableitungen berechnen,
- die Eigenschaften von Sinus und Cosinus (SinCos-1 bis SinCos-5) kennen und aus ihnen die Differenzierbarkeit herleiten können.

Selbstkontrollelement 16.3

Berechnen Sie die Ableitungen von $f(x) = x^4 \exp(x)$, $g(x) = \ln(\sin(x))$ und $h(x) = x^{\sqrt{2}}$.