Glossar zu Lektion 5

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der fünften Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

Kapitel 14 Funktionen

14.1 Grundlagen und erste Beispiele

14.1.1 Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Eine **Funktion** f auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Das **Bild** ist $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D : f(x) = y\}$.

14.1.2 Graph

Der **Graph** von $f : D \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}$.

14.1.3 Dirichletfunktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nicht grafisch darstellbar; in keinem Punkt stetig.

14.1.4 Komposition (Analysis)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D'$. Dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in D$. *Unterschied zur LA:* Es wird nur $f(D) \subseteq D'$ gefordert, nicht $f(D) = D'$.

14.1.6 Bemerkung (Umkehrfunktion)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, wenn f **injektiv** ist.

14.1.7 Umkehrfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv. Die Funktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ heißt **Umkehrfunktion** von f.

14.1.9 Monotonie

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** (bzw. **fallend**), falls $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$). Sie heißt **streng monoton wachsend** (bzw. **fallend**), falls $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$).

14.1.11 Proposition (streng monoton $\Rightarrow$ injektiv)

Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv. Ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend), so ist auch f^{-1} streng monoton wachsend (bzw. fallend).

14.1.14 Merkregel (Graph der Umkehrfunktion)

Den Graph von f^{-1} erhält man durch Spiegelung des Graphen von f an der Diagonale $d = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

14.1.15 Algebraische Verknüpfungen von Funktionen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Definiert für alle $x \in D$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$; $(af)(x) = af(x)$; $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Falls $g(x) \neq 0$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

14.1.19 Restriktion

Sei $D' \subseteq D$, $D' \neq \emptyset$. Die Funktion $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, heißt **Restriktion** (Einschränkung) von f auf D'.

14.1.20 Beschränktheit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn $\exists\, b \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq b$ für alle $x \in D$; **nach unten beschränkt**, wenn $\exists\, a \in \mathbb{R}$: $a \leq f(x)$ für alle x. **Beschränkt** bedeutet beides.

14.2 Beispiele

14.2.2 Produkt von Polynomen

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q = \sum_{j=0}^{m} b_j T^j \in K[T]$. Das Produkt ist $pq = \sum_k c_k T^k$ mit $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

14.2.5 Gradformel

Seien $p, q \in K[T]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n \geq 0$ und $\mathrm{Grad}(q) = m \geq 0$. Dann gilt $\mathrm{Grad}(pq) = n + m$.

14.2.6 Proposition (Division mit Rest)

Zu $p, q \in K[T]$ mit $q \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte $f, r \in K[T]$ mit $p = fq + r$ und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$.

14.2.7 Nullstelle

Sei $p \in K[T]$. Ein $\lambda \in K$ mit $\tilde{p}(\lambda) = \sum_i a_i \lambda^i = 0$ heißt **Nullstelle** von p.

14.2.8 Proposition (Nullstellen und Faktoren)

$\lambda \in K$ ist genau dann Nullstelle von $p \in K[T]$, wenn $p = (T - \lambda) \cdot q$ für ein Polynom $q \in K[T]$.

14.2.9 Korollar (Anzahl der Nullstellen)

Ein Polynom $p \in K[T]$, $p \neq 0$, vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

14.2.10 Polynomfunktion

Zu $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$ ist die **Polynomfunktion** $\tilde{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

14.2.13 Satz (Identitätssatz für Polynomfunktionen)

Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n$, $\mathrm{Grad}(q) = m$. Gilt $\tilde{p}(x) = \tilde{q}(x)$ für mehr als $\max(n, m)$ verschiedene $x \in \mathbb{R}$, so ist $m = n$ und $a_i = b_i$ für alle i.

14.2.16 Rationale Funktion

Seien $\tilde{p}, \tilde{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Dann heißt $\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{q}} : \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\} \to \mathbb{R}$ eine **rationale Funktion**.

14.2.21 Allgemeine Potenz a^ρ

Sei $a > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$. Wähle eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to \rho$. Dann ist

$a^\rho := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. (Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl von (r_n).) Für $a = 0$, $\rho > 0$: $0^\rho = 0$.

14.2.32 Satz (Potenzregeln für reelle Exponenten)

Seien $a, b > 0$ und $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$:

1. $a^\rho a^\sigma = a^{\rho+\sigma}$
2. $\frac{a^\rho}{a^\sigma} = a^{\rho-\sigma}$
3. $a^\rho b^\rho = (ab)^\rho$
4. $\frac{a^\rho}{b^\rho} = \left(\frac{a}{b}\right)^\rho$
5. $(a^\rho)^\sigma = a^{\rho\sigma}$

14.2.33 Satz (Potenzfunktion)

Sei $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\rho$. Dann: $\mathrm{Bild}(f) = (0,\infty)$; f ist streng monoton wachsend für $\rho > 0$, streng monoton fallend für $\rho < 0$; $f^{-1}(x) = x^{1/\rho}$.

14.2.34 Exponentialfunktion

Sei $a > 0$. Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$, heißt **Exponentialfunktion** zur Basis a.

14.2.35 Satz (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

Sei $a > 0$:

- Für $a \neq 1$: $\mathrm{Bild}(\exp_a) = (0,\infty)$; für $a = 1$: $\exp_1 = \hat{1}$.
- $a > 1$: streng monoton wachsend; $0 < a < 1$: streng monoton fallend.
- $\exp_a(0) = 1$, $\exp_a(1) = a$.
- $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

14.2.37 Notation (e-Funktion)

Die Funktion $\exp_e$ wird mit exp (ohne Index) bezeichnet. Man schreibt e^x für $\exp(x)$.

14.2.39 Satz

Sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n > -1$ und $x_n \neq 0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e$.

14.2.40 Logarithmus

Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion von $\exp_a$ heißt **Logarithmus zur Basis** a, bezeichnet $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

14.2.42 Satz (Eigenschaften des Logarithmus)

Sei $a > 0$, $a \neq 1$:

- $\mathrm{Bild}(\log_a) = \mathbb{R}$.
- $a > 1$: streng monoton wachsend; $0 < a < 1$: streng monoton fallend.
- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\log_a(x^\rho) = \rho \log_a(x)$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

14.2.43 Natürlicher Logarithmus

Die Funktion $\log_e : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird mit ln bezeichnet und **natürlicher Logarithmus** genannt.

14.2.44 Proposition

Sei $a > 0$:

- Für alle $x > 0$: $x^a = \exp(a \ln x)$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$: $\exp_a(x) = \exp(x \ln a)$.
- Für $a \neq 1$ und alle $x > 0$: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Kapitel 15 Stetigkeit

15.1 Grundlagen, Beispiele, erste Eigenschaften

15.1.1 Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig in** $a \in D$, wenn für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to a$ gilt: $f(a_n) \to f(a)$. f heißt **stetig auf** D, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

15.1.4 Beispiele stetiger Funktionen

Die allgemeine Potenzfunktion $x \mapsto x^\rho$, die Exponentialfunktion $\exp_a$ und der Logarithmus $\log_a$ sind auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.

15.1.9 Satz (ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)

$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $a \in D$ stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : \quad |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

15.1.11 Proposition (Rechenregeln für Stetigkeit)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in a, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $f \pm g$, αf, fg und (falls $g \neq 0$) f/g stetig in a. Außerdem: Ist $h : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ stetig in $f(a)$, so ist $h \circ f$ stetig in a.

15.1.13 Proposition

Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

15.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

15.2.2 Satz (Nullstellensatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ (oder umgekehrt). Dann gibt es mindestens ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

15.2.3 Nullstelle

Ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$ heißt **Nullstelle** von $f : D \to \mathbb{R}$.

15.2.4 Korollar (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei d eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x_d \in [a, b]$ mit $f(x_d) = d$. Insbesondere ist das Bild einer stetigen Funktion auf einem Intervall wieder ein Intervall.

15.2.8 Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a, b])$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall.

15.2.9 Korollar (Satz vom Minimum und Maximum)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Stellen $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$.

15.2.10 Lemma

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist f streng monoton.

15.2.12 Korollar

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Genau dann ist f injektiv, wenn f streng monoton ist.

15.2.14 Proposition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig, I ein Intervall. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

15.3 Grenzwerte von Funktionen

15.3.1 Häufungspunkt

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Folge (a_n) in $M \setminus \{a\}$ gibt mit $a_n \to a$.

15.3.4 Konvergenz einer Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **konvergent in** a (einem Häufungspunkt von D), wenn $(f(a_n))$ für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $a_n \to a$ konvergiert.

15.3.8 Definition (Grenzwert)

Ist f konvergent in a, so heißt der Grenzwert einer solchen Folge $(f(a_n))$ der **Grenzwert** von f in a: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. (Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge.)

15.3.9 Proposition

Sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt: f ist genau dann stetig in a, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

15.3.11 Stetige Fortsetzung

Sei $a \notin D$ ein Häufungspunkt und $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Die Funktion $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $g|_D = f$ und $g(a) = c$ heißt **stetige Fortsetzung** von f auf $D \cup \{a\}$.

15.3.14 Hebbare Unstetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ besitzt in $a \in D$ eine **hebbare Unstetigkeit**, wenn $f|_{D\setminus\{a\}}$ auf D stetig fortgesetzt werden kann, also $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert (aber $\neq f(a)$ ist).

15.3.15 Satz (ε-δ-Kriterium für Grenzwert)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{a\} : \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

15.3.17 Proposition (Rechenregeln für Funktionenkonvergenz)

Seien $\lim_{x\to a} f(x) = u$ und $\lim_{x\to a} g(x) = v$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = u \pm v$; $\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \alpha u$; $\lim_{x\to a}(fg)(x) = uv$; $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = u/v$ (falls $v \neq 0$).

Kapitel 16 Differenzierbarkeit

16.1 Die Ableitung einer Funktion

16.1.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in** $a \in I$, wenn

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. $f'(a)$ heißt **Ableitung** von f in a.

16.1.3 Proposition (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig)

Ist f in a differenzierbar, so ist f in a stetig. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)

16.1.5 Differenzenquotient

Der Bruch $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $(x \neq a)$ heißt **Differenzenquotient**. Er ist die Steigung der **Sekante** durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$.

16.1.6 Merkregel (Tangente)

Die Ableitung $f'(a)$ ist die **Steigung der Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. Die Tangente hat die Gleichung $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

16.1.7 Lokale Extrema

$f : D \to \mathbb{R}$ hat in $a \in D$ ein **lokales Maximum** (bzw. **Minimum**), wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ gibt, sodass $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$) für alle $x \in U_\delta(a) \cap D$.

16.1.8 Globale Extrema

f hat in a ein **globales Maximum** (bzw. **Minimum**), wenn $f(a) \geq f(x)$ (bzw. $f(a) \leq f(x)$) für alle $x \in D$. Globale Extrema sind stets auch lokale Extrema.

16.1.10 Innerer Punkt

$x \in X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **innerer Punkt** von X, wenn $\exists\, \delta > 0 : U_\delta(x) \subseteq X$.

16.1.12 Proposition (notwendige Bedingung für Extrema)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $a \in I$ differenzierbar. Hat f in a ein lokales Extremum, so gilt $f'(a) = 0$. *Vorsicht:* Die Umkehrung gilt nicht.

16.2 Differentiationsregeln

16.2.1 Proposition (Rechenregeln der Differentialrechnung)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **Summenregel:** $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
- **Faktorregel:** $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
- **Produktregel:** $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ (falls $g(a) \neq 0$)

16.2.2 Korollar (Reziprokregel)

Ist g in a differenzierbar mit $g(a) \neq 0$, so gilt $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$.

16.2.3 Satz (Kettenregel)

Sei g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, $\mathrm{Bild}(g) \subseteq I_f$. Dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es gilt:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

16.2.4 Proposition (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

16.3 Ableitungen wichtiger Funktionen

16.3.1 Proposition (Polynomfunktionen)

Polynomfunktionen $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

16.3.2 Proposition (ganze Potenzen)

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ (falls $k < 0$) gilt: $(x^k)' = kx^{k-1}$.

16.3.4 Satz (Exponentialfunktion)

Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp_a'(x) = \exp_a(x) \cdot \ln(a)$, insbesondere $\exp'(x) = \exp(x)$.

16.3.5 Korollar (natürlicher Logarithmus)

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

16.3.6 Korollar (allgemeiner Logarithmus)

Für $a > 0$, $a \neq 1$, ist $\log_a$ differenzierbar, und es gilt $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

16.3.7 Korollar (allgemeine Potenzfunktion)

Für $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$ auf $(0, \infty)$: f ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = ax^{a-1}$.

16.3.11 Satz (Winkelfunktionen)

Sinus und Cosinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt:

$$\sin'(x) = \cos(x), \qquad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Verwendet werden dabei die Eigenschaften SinCos-1 bis SinCos-5, insbesondere $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.