Einsendeaufgaben – Lektion 5

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 5.1

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Fall 1: $x < -1$

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit Grenzwert x. Wir definieren ein $\varepsilon := \frac{|x-(-1)|}{2}$.

Es gilt dann $x < x + \varepsilon < -1$ und für fast alle x_n gilt $x_n < x + \varepsilon < -1$. Und daher für fast alle x_n gilt:

$$f(x_n) = x_n + 2.$$

Da $x + 2$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.

Fall 2: $x > -1$

Gleiche Argumentation wie Fall 1.

Fall 3: $x = -1$

Wir verwenden das ε-δ-Kriterium. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da jede Polynomfunktion stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle y mit $|y+1| < \delta_1$ gilt:

$$|(y + 2) - (x + 2)| < \varepsilon.$$

Genauso existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass für alle y mit $|y + 1| < \delta_2$ gilt:

$$|y^2 - x^2| < \varepsilon.$$

Wir definieren ein $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$.

Zu zeigen ist nun: für alle y mit $|y + 1| < \delta$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Fall 3.1: $y \leq -1$

Da $\delta \leq \delta_1$ gilt, folgt $|y+1| < \delta \leq \delta_1$. Wegen $y \leq -1$ gilt $f(y) = y+2$. Aus $|y+1| < \delta_1$ und $f(y) = y + 2$ folgt:

$$|f(y) - f(x)| = |(y + 2) - (x + 2)| < \varepsilon.$$

Fall 3.2: $y > -1$

Gleiche Argumentation.