Studierhinweise zu Lektion 4

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Diese Lektion eröffnet den Analysis-Teil des Moduls. Im Zentrum steht die Frage, was die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gegenüber anderen Körpern so besonders macht – und warum Analysis ohne $\mathbb{R}$ nicht funktioniert.

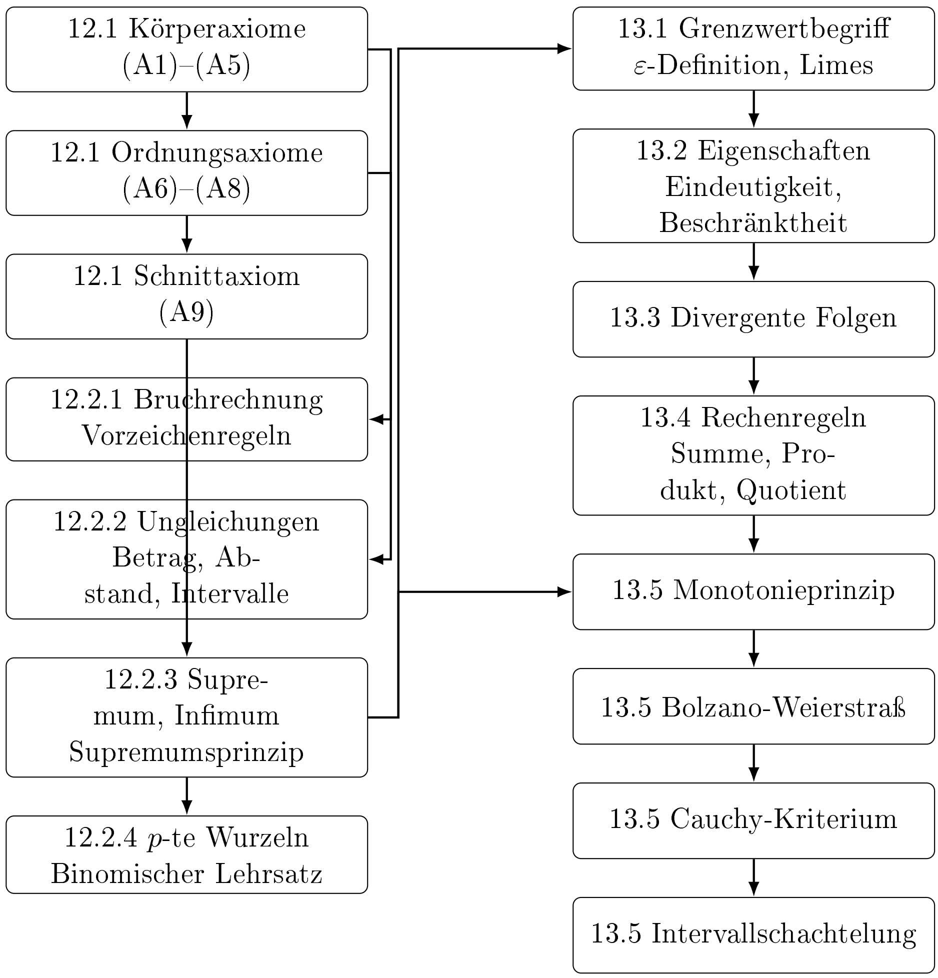
In **Kapitel 12** werden neun Axiome für $\mathbb{R}$ vorgestellt: fünf Körperaxiome, drei Ordnungsaxiome und das entscheidende Schnittaxiom (Axiom der Ordnungsvollständigkeit). Aus diesen Axiomen leiten wir systematisch die Bruchrechnung, den Umgang mit Ungleichungen, den Absolutbetrag, Intervalle sowie das Supremumsprinzip her – das Herzstück, das $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Am Ende von Kapitel 12 zeigen wir, dass p-te Wurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen stets existieren und eindeutig sind.

In **Kapitel 13** wird der Begriff des Grenzwertes einer reellen Folge präzisiert. Dieser Begriff ist das unverzichtbare Werkzeug aller Analysis. Neben der formalen ε-Definition lernen Sie Rechenregeln für konvergente Folgen sowie vier wichtige Konvergenzprinzipien kennen: das Monotonieprinzip, den Satz von Bolzano-Weierstraß, das Cauchy-Kriterium und das Prinzip der Intervallschachtelung.

Lesen Sie diesen Lehrtext *aktiv*: Schreiben Sie jeden Beweisschritt selbst nach, und überprüfen Sie jede Ungleichung an einem kleinen Zahlenbeispiel, bevor Sie weiterlesen. Kapitel 13 ist Grundlage der gesamten weiteren Analysis – lassen Sie hier keine Lücken.

Struktur der Lektion 4

Kap. 12: Reelle Zahlen **Kap. 13: Grenzwerte von Folgen**



Zielelement 12.1 – Die Axiome der reellen Zahlen

Lerninhalte

Körperaxiome (A1)–(A5): $\mathbb{R}$ ist ein Körper

$\downarrow$

Ordnungsaxiome (A6)–(A8): Trichotomie, Transitivität, Monotoniegesetze

$\downarrow$

Schnittaxiom (A9): Dedekind'scher Schnitt $(A|B)$, Trennungszahl

$\downarrow$

Unterschied $\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{Q}$: angeordneter Körper – nicht hinreichend

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die neun Axiome der reellen Zahlen benennen und in drei Gruppen einteilen können,
- erklären können, warum weder die Körperaxiome noch die Ordnungsaxiome allein $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheiden,
- den Begriff des Dedekind'schen Schnittes $(A|B)$ und der Trennungszahl definieren können,
- verstehen, warum $\mathbb{F}_2$ kein angeordneter Körper ist,
- das Schnittaxiom (A9) in eigenen Worten erläutern können (geometrische Intuition: Lückenlosigkeit der Zahlengeraden).

Selbstkontrollelement 12.1

Sei $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$. Erklären Sie, warum $(A|B)$ ein Dedekind'scher Schnitt der rationalen Zahlen ist, und was das Schnittaxiom für die reellen Zahlen in diesem Zusammenhang leistet.

Zielelement 12.2.1–12.2.2 – Folgerungen: Bruchrechnung und Ungleichungen

Lerninhalte

Bruchrechnung, Vorzeichen (Prop. 12.2.1)

$\downarrow$

Grundlegendes über Ungleichungen (Prop. 12.2.3–12.2.5)

$\downarrow$

Bernoulli'sche Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$

$\downarrow$

Betrag $|a|$, Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$

$\downarrow$

Abstand $d(a,b) = |a-b|$ ε-Umgebungen $U_\varepsilon(x_0)$

$\downarrow$

Intervalle: offen, abgeschlossen, halboffen, uneigentlich

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- Ungleichungen mit den Grundregeln (Addition, Multiplikation, Vorzeichenwechsel) manipulieren und das Umdrehen des Ungleichungszeichens bei Multiplikation mit negativen Zahlen sicher anwenden können,
- die Bernoulli'sche Ungleichung anwenden und ihren Beweis per Induktion skizzieren können,
- den Absolutbetrag und seine Eigenschaften (Dreiecksungleichung, Multiplikativität) kennen,
- ε-Umgebungen als Intervallschreibweise und als Betragsbedingung $|x - x_0| < \varepsilon$ ausdrücken können,
- die verschiedenen Intervalltypen (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ sowie uneigentliche Intervalle benennen und auf der Zahlengeraden darstellen können.

Selbstkontrollelement 12.2.1–12.2.2

Beweisen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.
Hinweis: Wenden Sie die Dreiecksungleichung auf $a = (a - b) + b$ an.

Zielelement 12.2.3 – Supremum, Infimum und Supremumsprinzip

Lerninhalte

Minimum, Maximum
(müssen in M liegen)

$\downarrow$

Obere und untere Schranken
(müssen nicht in M liegen)

$\downarrow$

Supremum $\sup M$
Infimum $\inf M$

$\downarrow$

Supremumsprinzip:
jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum

$\downarrow$

Satz des Archimedes:
$\mathbb{N}$ ist nicht beschränkt

$\downarrow$

Satz des Eudoxos:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \varepsilon$

$\downarrow$

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Unterschied zwischen Minimum/Maximum und unteren/oberen Schranken erklären können,
- Supremum und Infimum einer Menge M anhand der Definition 12.2.47 identifizieren können,
- das Supremumsprinzip (Satz 12.2.52) formulieren und seine Äquivalenz zum Schnittaxiom erläutern können (Korollar 12.2.56),
- den Satz des Archimedes (12.2.57) und den Satz des Eudoxos (12.2.58) anwenden können,
- verstehen, warum $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt (Korollar 12.2.59).

Selbstkontrollelement 12.2.3

Sei $M = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Bestimmen Sie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ (falls existent) und $\min M$ (falls existent) und begründen Sie Ihre Antwort.

Zielelement 12.2.4 – p-te Wurzeln

Lerninhalte

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

$\downarrow$

Binomischer Lehrsatz
$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k$

$\downarrow$

Definition p-te Wurzel aus $a \geq 0$:
$r \geq 0$ mit $r^p = a$

$\downarrow$

Eindeutigkeit (Lemma 12.2.66):
$x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$

$\downarrow$

Existenz (Satz 12.2.68): Supremumsprinzip liefert $\sqrt[p]{a}$

$\downarrow$

Potenzen mit rationalem Exponent
$a^{s/p} = \sqrt[p]{a^s}$, Potenzregeln

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

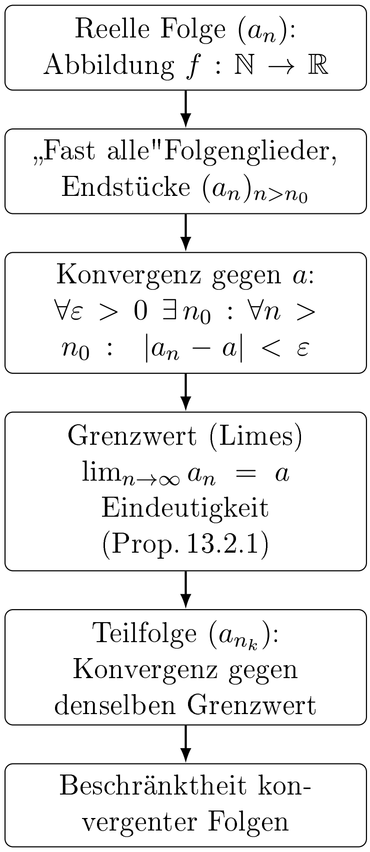
- den Binomialkoeffizienten berechnen und den binomischen Lehrsatz anwenden können,
- die Definition der p-ten Wurzel kennen und verstehen, warum nur $r \geq 0$ zugelassen ist,
- die Eindeutigkeit von $\sqrt[p]{a}$ mit Lemma 12.2.66 begründen können,
- die Beweisidee der Existenz (Satz 12.2.68) skizzieren können (Supremum der Menge $M = \{y \geq 0 \mid y^p < a\}$),
- die Potenzregeln für rationale Exponenten (Proposition 12.2.78) kennen,
- wissen, warum $\sqrt{2}$ irrational ist (Proposition 12.2.72).

Selbstkontrollelement 12.2.4

Berechnen Sie $\binom{6}{2}$ und $\binom{6}{4}$. Geben Sie außerdem an: Warum kann $\sqrt[3]{-8}$ gemäß Definition 12.2.64 nicht als dritte Wurzel aus -8 bezeichnet werden?

Zielelement 13.1–13.2 – Der Grenzwertbegriff

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die ε-Definition der Konvergenz (Definition 13.1.8) auswendig kennen und auf konkrete Folgen anwenden können,
- verstehen, was „fast alle Folgenglieder"bedeutet, und den Unterschied zu „alleërläutern können,
- die Konvergenz einfacher Folgen (z. B. $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{\sqrt[k]{n}})$, (q^n) für $|q| < 1$) direkt aus der Definition beweisen können,
- die Eindeutigkeit des Grenzwertes (Proposition 13.2.1) kennen,
- verstehen, warum jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert, und dieses Kriterium zur Divergenzprüfung einsetzen können.

Selbstkontrollelement 13.1–13.2

Sei $(a_n) = \left(\frac{2n-14}{n+1}\right)$. Bestimmen Sie den Grenzwert und zeigen Sie mit der ε-Definition, dass die Folge gegen diesen Grenzwert konvergiert.

Zielelement 13.3–13.4 – Divergenz und Rechnen mit Folgen

Lerninhalte

Divergenz: Negation der Konvergenz (Proposition 13.3.2)

Vergleichssatz (Prop. 13.4.1): $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$

Einschnürungssatz (Prop. 13.4.3): $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim c_n = \lim a_n$

Nullfolge $\times$ beschränkte Folge $=$ Nullfolge (Prop. 13.4.9)

Rechenregeln (Prop. 13.4.12): $\lim(a_n \pm b_n)$, $\lim a_n b_n$, $\lim(a_n/b_n)$

Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

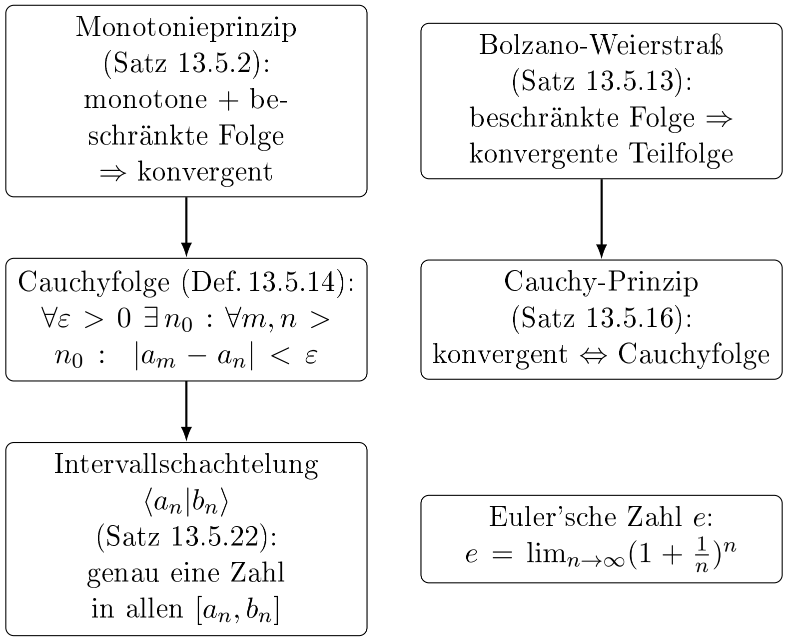
- Divergenz einer Folge formal charakterisieren und an Beispielen nachweisen können (z. B. $((-1)^n)$, (n)),
- Vergleichssatz und Einschnürungssatz anwenden können,
- die Rechenregeln für konvergente Folgen (Proposition 13.4.12) anwenden und dabei beachten, dass sie nur von rechts nach links gelesen werden dürfen,
- Grenzwerte rationaler Folgen durch Kürzen des führenden Terms berechnen können,
- wissen, dass aus der Konvergenz von $(a_n b_n)$ *nicht* auf die Konvergenz von (a_n) oder (b_n) geschlossen werden darf.

Selbstkontrollelement 13.3–13.4

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 2n - 5}{5n^3 + n^2}$ und begründen Sie jeden Schritt mit den Rechenregeln. Geben Sie außerdem ein Beispiel für eine Nullfolge (b_n) mit $b_n \neq 0$, für die $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ divergiert.

Zielelement 13.5 – Vier Konvergenzprinzipien

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- das Monotonieprinzip formulieren, seinen Beweis skizzieren und anwenden können (insbesondere: monotone Folge konvergiert $\Leftrightarrow$ beschränkt),
- den Satz von Bolzano-Weierstraß (jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge) kennen und zum Nachweis von Konvergenzeigenschaften verwenden können,
- den Begriff der Cauchyfolge erklären und Cauchy-Folgen erkennen,
- das Cauchy-Konvergenzprinzip (konvergent $\Leftrightarrow$ Cauchyfolge) anwenden können,
- das Prinzip der Intervallschachtelung verstehen und wissen, dass genau eine reelle Zahl in allen Intervallen liegt,
- die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von $\big((1+\frac{1}{n})^{n+1}\big)$ und $\big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big)$ kennen.

Selbstkontrollelement 13.5

Sei (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist (Hinweis: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 2$), und schließen Sie auf Konvergenz. Ist $\lim a_n$ explizit bekannt?