Glossar zu Lektion 4

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der vierten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

12.1 Die Axiome der reellen Zahlen

12.1.1 Körperaxiome (A1)–(A5)

$\mathbb{R}$ ist ein Körper: kommutativ, assoziativ, Distributivgesetz, neutrale Elemente 0 und 1, additive und multiplikative Inverse.

12.1.4 Ordnungsaxiome (A6)–(A8)

Für je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eines: $a < b$, $a = b$, $a > b$ (Trichotomie). Transitivität: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$. Monotoniegesetz: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und, für $c > 0$: $ac < bc$.

12.1.5 Angeordneter Körper

Ein Körper K, der die Axiome (A6)–(A8) erfüllt. Sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper. $\mathbb{F}_2$ ist keiner.

12.1.6 Dedekind'scher Schnitt

Ein Paar $(A|B)$ nichtleerer Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \cup B = \mathbb{R}$ und $a < b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt **Trennungszahl**, wenn $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

12.1.8 Schnittaxiom (A9)

Jeder Dedekind'sche Schnitt besitzt *genau eine* Trennungszahl. Dieses Axiom unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ (Ordnungsvollständigkeit).

12.2.1 Folgerungen aus den Körperaxiomen

12.2.1 Proposition (Bruchrechnung)

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(b, d \neq 0)$:

- $(-a)b = -(ab), \quad (-a)(-b) = ab$
- $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}, \quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}, \quad \dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc}$

12.2.2 Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

12.2.3 Proposition (Grundlegendes über Ungleichungen)

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0; \quad a < 0 \Leftrightarrow -a > 0; \quad a < b \Leftrightarrow -b < -a.$

12.2.4 Proposition

Gleichgerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden: aus $a < b$ und $c < d$ folgt

$a + c < b + d$.

12.2.9 Proposition

Ist $a < b$ und $c < 0$, so gilt $ac > bc$. **Merkregel 12.2.11:** Multiplikation mit negativer Zahl dreht das Ungleichungszeichen um.

12.2.12 Proposition

Gleichgerichtete positive Ungleichungen dürfen multipliziert werden: aus $0 < a < b$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$.

12.2.17 Bernoulli'sche Ungleichung

Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

12.2.19 Betrag

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

12.2.20 Bemerkung (Eigenschaften des Betrags)

$|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|a| = |-a|$; $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$.
Für $\alpha > 0$: $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

12.2.21 Proposition (Grundeigenschaften des Betrags)

$|ab| = |a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.
Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.
$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

12.2.24 Abstand

$d(a, b) := |a - b|$. Es gilt $d(a, b) = d(b, a)$ und $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (Dreiecksungleichung).

12.2.29 Intervalle

Für $a \leq b$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offen)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen)
- $(a, b]$: links halboffen; $[a, b)$: rechts halboffen

12.2.32 ε-Umgebung

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. $U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ (offene ε-Umgebung).
$U_\varepsilon[x_0] := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ (abgeschlossene ε-Umgebung).

12.2.3 Folgerungen aus dem Schnittaxiom

12.2.36 Minimum, Maximum

$m \in M$ heißt **Minimum** von M, wenn $m \leq x$ für alle $x \in M$.

$m \in M$ heißt **Maximum** von M, wenn $x \leq m$ für alle $x \in M$.
Minimum und Maximum müssen in M liegen und sind eindeutig (falls vorhanden).

12.2.42 Beschränktheit

M heißt **nach oben beschränkt**, wenn ein $b \in \mathbb{R}$ mit $x \leq b$ für alle $x \in M$ existiert (obere Schranke).
Nach unten beschränkt: analoges $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x$.
Beschränkt: nach oben und unten beschränkt.

12.2.47 Supremum, Infimum

S heißt **Supremum** (kleinste obere Schranke) von M, wenn:

(1) S ist obere Schranke von M,

(2) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $y \in M$ mit $y > S - \varepsilon$.

Infimum (größte untere Schranke) analog. Schreibweise: $\sup M$, $\inf M$. Beide sind eindeutig (falls vorhanden).

12.2.48 Bemerkung

Hat M ein Maximum, so ist $\max M = \sup M$. Hat M ein Minimum, so ist $\min M = \inf M$.

12.2.52 Supremumsprinzip

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.
Korollar 12.2.56: Das Supremumsprinzip ist äquivalent zum Schnittaxiom (A9).

12.2.53 Infimumsprinzip (Korollar)

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

12.2.57 Satz des Archimedes

Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

12.2.58 Satz des Eudoxos

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$.

12.2.59 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Zu jeder reellen Zahl a und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $|r - a| < \varepsilon$.

12.2.4 p-te Wurzeln

12.2.60 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, \qquad \binom{n}{0} = 1.$$

12.2.62 Binomischer Lehrsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k.$$

12.2.64 p-te Wurzel

Sei $a \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$. Eine Zahl r heißt **p-te Wurzel** aus a, wenn $r \geq 0$ und $r^p = a$. Für $p = 2$: Wurzel. Notation: $\sqrt[p]{a}$ (für $p = 2$: $\sqrt{a}$).

12.2.66 Lemma

Für $x, y > 0$ und $p \in \mathbb{N}$: $x^p > 0$ und $x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$.

12.2.69 Korollar (Existenz und Eindeutigkeit)

Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ und jedem $p \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine p-te Wurzel $\sqrt[p]{a}$.

12.2.72 Proposition

$\sqrt{2}$ ist irrational.

12.2.76 Potenz mit rationalem Exponent

Sei $a > 0$, $r = s/p$ mit $s, p \in \mathbb{N}$:

$$a^r = \sqrt[p]{a^s}, \qquad a^{-r} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^s}}, \qquad a^0 = 1.$$

12.2.78 Potenzregeln für rationale Exponenten

Für $a, b > 0$ und $r, r' \in \mathbb{Q}$: $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$; $\quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$; $\quad a^r b^r = (ab)^r$.

13.1 Der Grenzwertbegriff

13.1.1 Reelle Folge

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n), wobei $a_n = f(n)$. Folgenglieder a_n sind stets verschieden als Elemente der Folge zu betrachten, auch wenn $a_n = a_m$ für $n \neq m$.

13.1.2 Endstück, „fast alle"

Für $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt $(a_n)_{n>n_0}$ ein **Endstück** der Folge.
Fast alle Glieder haben eine Eigenschaft $\mathcal{A}$, wenn es ein n_0 gibt, sodass alle Glieder des Endstücks $(a_n)_{n>n_0}$ die Eigenschaft $\mathcal{A}$ haben.

13.1.6 Konvergenz (anschaulich)

(a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder von (a_n) liegen.

13.1.8 Konvergenz (ε-Definition)

(a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n). Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

13.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

13.2.1 Proposition

Eine konvergente Folge besitzt *genau einen* Grenzwert.

13.2.3 Teilfolge

Ist $(n_1, n_2, \ldots)$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen ($n_i < n_{i+1}$), so heißt $(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine **Teilfolge** von (a_n).

13.2.4 Proposition

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (a_n) konvergiert gegen $\lim a_n$.

13.2.6 Beschränkte Folge

(a_n) heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ beschränkt ist.

13.2.7 Proposition

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

13.3 Divergente Folgen

13.3.1 Divergenz

Eine Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

13.3.2 Proposition

(a_n) konvergiert *nicht* gegen a genau dann, wenn es eine ε_0-Umgebung von a gibt, sodass eine Teilfolge von (a_n) vollständig außerhalb von $U_{\varepsilon_0}(a)$ liegt.

13.4 Das Rechnen mit konvergenten Folgen

13.4.1 Vergleichssatz

Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, und gilt fast immer $a_n \leq b_n$, so folgt $a \leq b$.

13.4.3 Einschnürungssatz

Konvergieren (a_n) und (b_n) gegen a, und gilt fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$, so konvergiert (c_n) gegen a.

13.4.5 Nullfolge

Eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

13.4.7 Betragssatz

Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert $(|a_n|)$ gegen $|a|$.

13.4.9 Proposition

Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

13.4.12 Rechenregeln für konvergente Folgen

Sei $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$. Dann gilt:

(1) $(a_n + b_n) \to a + b$

(2) $(a_n b_n) \to ab$

(3) $(\alpha a_n) \to \alpha a$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

(4) $(a_n - b_n) \to a - b$

(5) Falls $b \neq 0$ und fast alle $b_n \neq 0$: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$

Achtung: Die Regeln gelten nur von rechts nach links; aus der Konvergenz von $(a_n + b_n)$ folgt *nicht*, dass (a_n) oder (b_n) konvergieren.

13.5 Vier Prinzipien der Konvergenztheorie

13.5.1 Monotone Folge

(a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n; **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n.

13.5.2 Monotonieprinzip

Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.
– Monoton wachsend und beschränkt: konvergiert gegen $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
– Monoton fallend und beschränkt: konvergiert gegen $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Korollar 13.5.3: Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

13.5.6 Euler'sche Zahl e

$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Es gilt auch $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Näherungswert: $e \approx 2{,}718$.

13.5.13 Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

13.5.14 Cauchyfolge

(a_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Anschaulich: späte Folgenglieder liegen beliebig dicht beieinander.

13.5.17 Cauchy'sches Konvergenzprinzip

Eine reelle Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

13.5.20 Intervallschachtelung

Eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ heißt **Intervallschachtelung** $\langle a_n \mid b_n \rangle$, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n und die Intervalllängen $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge bilden.

13.5.22 Prinzip der Intervallschachtelung

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n \mid b_n \rangle$ gibt es genau eine reelle Zahl a, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.