

Einsendaufgaben – Lektion 4

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 4.5

a) „ \Rightarrow Richtung:

Sei (a_n) und (b_n) konvergent, dann folgt aus Proposition 13.4.12 direkt, dass $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergieren.

„ \Leftarrow Richtung:

Sei $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergent.

Es gilt:

$$a_n = \frac{1}{2}(2a_n) = \frac{1}{2}((a_n + b_n) + (a_n - b_n))$$

$$b_n = \frac{1}{2}(2b_n) = \frac{1}{2}((a_n + b_n) - (a_n - b_n))$$

Da $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergieren, folgt aus Proposition 13.4.12, dass (a_n) und (b_n) ebenfalls konvergieren.

b) Gilt nicht, da z. B. (a_n) mit $a_n = n$ und (b_n) mit $b_n = -n$ divergieren, aber $(a_n + b_n)$ konvergiert, da $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Gilt nicht.

Beispiel:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = (-1)^n$$

Da (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt ist, gilt wegen der Proposition 13.4.9, dass $(a_n b_n)$ konvergiert. Allerdings divergiert (b_n) .