

Einsendaufgaben – Lektion 4

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 4.2

a) $\sup M_1 = 1$

Beweis:

1. 1 ist eine obere Schranke, da

$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n-1 < n+1 \Leftrightarrow -1 < 1.$$

2. Es gilt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Dann sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

Da 1 obere Schranke ist, folgt

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right| = |-1| \left| 1 - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right| = 1 - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} < \varepsilon.$$

Also gilt

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$\max M_1$: existiert nicht, da $\sup M_1 \notin M_1$

$\min M_1 = 0$

Beweis:

Da $n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $0 \leq n-1$ und damit $0 \leq \frac{n-1}{n+1}$. Und $0 \in M_1$, da für $n = 1$

$$0 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{n-1}{n+1} \text{ gilt.}$$

$\inf M_1 = 0$

Beweis:

folgt aus $\min M_1 = \inf M_1$, da Minimum existiert.

b) M_2 besitzt keine untere Schranke.

Beweis:

Wir definieren eine Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{\left(-1 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \left(-1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -n + 1$$

Die Folge (a_n) besitzt keine untere Schranke. Da jedes $a_n \in M_2$, existiert keine untere Schranke für M_2 .

Also existiert kein $\min M_2$ und kein $\inf M_2$.

Allerdings existiert eine obere Schranke; nämlich die 1:

Als $x < x + 1$ für alle $x \in (-1, \infty)$ folgt $\frac{x}{x+1} < 1$.

Die 1 ist sogar das Supremum, da die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n+1}$ gegen 1 konvergiert und $a_n \in M_2$. $\sup M_2$ liegt nicht in M_2 , da aus der Annahme

$$\frac{x}{1+x} = 1$$

der Widerspruch $x = 1 + x$ folgt. Also existiert kein Maximum.