Einsendeaufgaben – Lektion 4

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 4.1

a) Da Division durch 0 nicht definiert ist, muss $x \notin \{0, -1, -2, -3\}$.

Untersuchung des ersten Terms $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$:

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

<u>Fall 1: $x > -1$</u>

Es gilt $\frac{x-1}{x+1} < 1$, da

$$\frac{x-1}{x+1} < 1 \iff x-1 < x+1 \iff -1 < 1$$

<u>Fall 2: $x < -1$</u>

Es gilt $\frac{x-1}{x+1} > 1$, da

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \iff x-1 < x+1 \iff -1 < 1$$

Untersuchung des zweiten Terms:

$$\frac{1-\frac{1}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}} = \frac{x+1}{x+3}$$

Wir setzen $x = y - 2$:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{y-1}{y+1}$$

$\frac{y-1}{y+1}$ ist gleich dem ersten Term aus der ersten Untersuchung. Wir wenden $y = x+2$ an und erhalten:

<u>Fall 1: $x > -3$</u>

$$\frac{x+1}{x+3} < 1$$

Fall 2: $x < -3$

$$\frac{x+1}{x+3} > 1$$

Aus den Untersuchungen können wir schlussfolgern:

Fall 1: $x > -1$

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}} < 1 + 1 = 2$$

Fall 2: $x < -3$

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}} > 1 + 1 = 2$$

Es fehlt noch der 3. Fall: $x = -1$ und $x = -3$ muss nicht untersucht werden, da es am Anfang schon ausgeschlossen wurde.

Fall 3: $-3 < x < -1$

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3)+(x+1)^2}{(x+1)(x+3)} = \frac{2(x^2+2x-1)}{(x+1)(x+3)} < 2$$

Da $-3 < x < -1$, ist der Nenner negativ, weil $(x+1)$ negativ, aber $(x+3)$ positiv ist.

Vereinfachung der Ungleichung:

$$\frac{2(x^2+2x-1)}{(x+1)(x+3)} < 2$$

$$\iff \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+3)} < 1$$

$$\iff x^2+2x-1 > (x+1)(x+3) = x^2+4x+3$$

$$\iff -2x > 4$$

$$\iff x < -2$$

Demnach muss x in Fall 3 kleiner als -2 sein.

Insgesamt gilt die Ungleichung

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x+2}}{1+\frac{1}{x+2}} < 2$$

für alle $x \in (-3, -2) \cup (-1, \infty)$.

b) Da die Wurzel nur für positive Zahlen definiert ist, muss gelten:

$$3x + 1 \geq 0$$

Folglich muss $x \geq -\frac{1}{3}$ sein.

Da $\sqrt{3x+1}$ positiv ist, kann die Ungleichung quadriert werden:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1} &< x+1 \\
\iff 3x+1 &< (x+1)^2 \\
\iff 3x+1 &< x^2+2x+1 \\
\iff x &< x^2
\end{aligned}$$

<u>Fall 1: $x > 0$</u>

$$x < x^2 \iff 1 < x$$

<u>Fall 2: $-\frac{1}{3} \leq x < 0$</u>

$$x < x^2 \iff 1 > x$$

<u>Fall 3: $x = 0$</u>

$$x < x^2 \iff 0 < 0$$

Aus den Äquivalenzen lässt sich schließen:

$$\sqrt{3x+1} < x+1$$

für alle $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, \infty)$.