

Studierhinweise zu Lektion 3

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Diese Lektion bildet das Herzstück der Linearen Algebra im Modul. In Kapitel 7 werden die Begriffe der linearen Unabhängigkeit, der Basis und der Dimension endlich erzeugter Vektorräume eingeführt. Das zentrale Hilfsmittel ist der *Austauschsatz von Steinitz*, aus dem alle wichtigen Dimensionsformeln folgen.

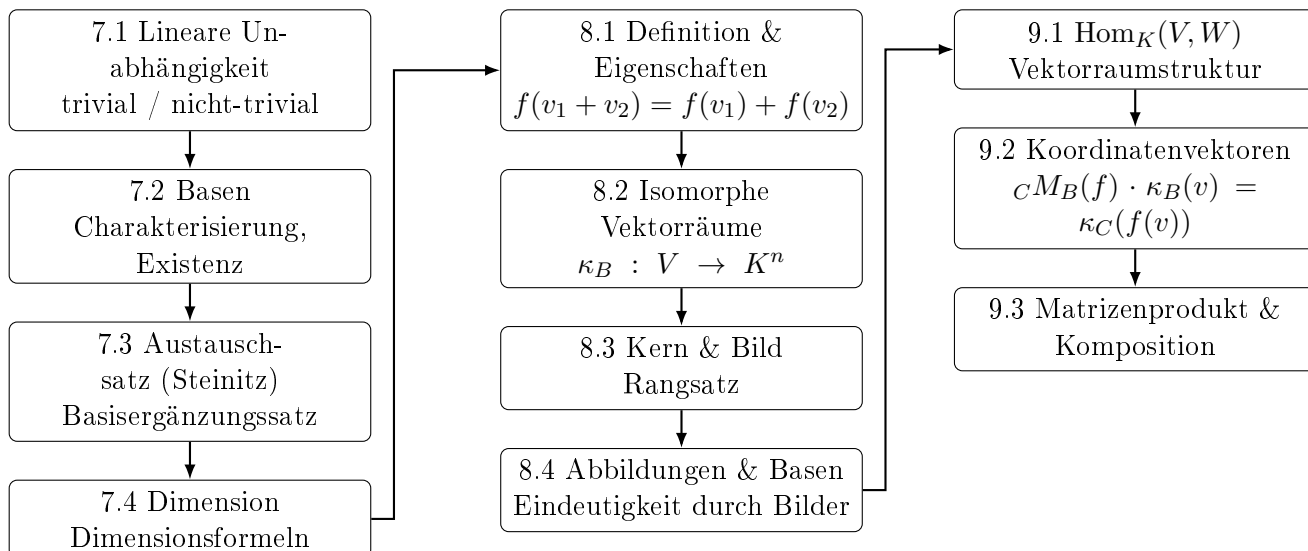
Kapitel 8 wendet sich den *linearen Abbildungen* zu – Abbildungen zwischen Vektorräumen, die Addition und Skalarmultiplikation respektieren. Hier lernen Sie die Begriffe Kern, Bild und Rang einer linearen Abbildung kennen sowie den wichtigen *Rangsatz*.

Kapitel 9 schlägt die Brücke zurück zu Matrizen: Jeder linearen Abbildung zwischen endlich erzeugten Vektorräumen kann (nach Wahl von Basen) eine Matrix zugeordnet werden. Matrizenmultiplikation entspricht dabei der Komposition linearer Abbildungen.

Lernen Sie die Definitions- und Satzformulierungen so weit, dass Sie sie erkennen, anwenden und — zumindest skizzenhaft — beweisen können. Viele Sätze dieser Lektion sind Folgerungen aus dem Steinitz'schen Austauschsatz und bauen aufeinander auf.

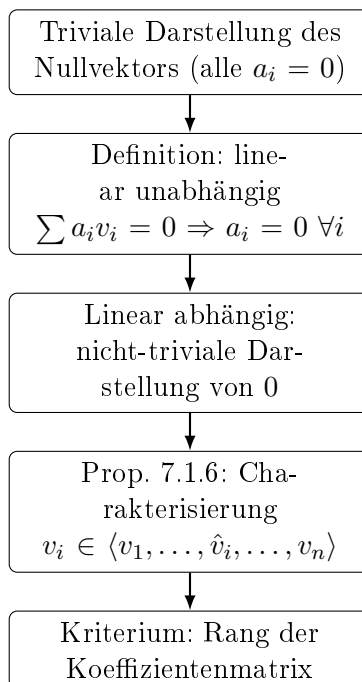
Struktur der Lektion 3

Kapitel 7: Basen & Dimension **Kapitel 8: Lineare Abbildungen** **Kapitel 9: Abbildungen & Matrizen**



Zielelement 7.1 – Lineare Unabhängigkeit

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

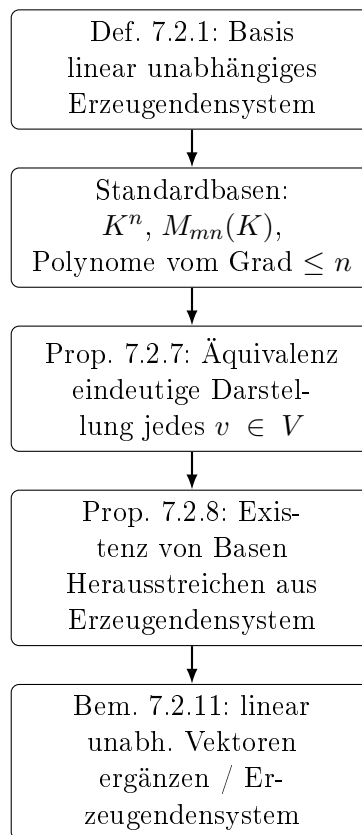
- den Begriff der linearen Unabhängigkeit präzise definieren können,
- lineare Unabhängigkeit von Vektoren mithilfe des Gauß-Algorithmus (Rangberechnung) überprüfen können,
- die Charakterisierung linear abhängiger Vektoren (Prop. 7.1.6) kennen und anwenden können,
- wissen, dass ein einzelner Vektor $v \neq 0$ stets linear unabhängig ist, und zwei Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist.

Selbstkontrollelement 7.1

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig? Bestimmen Sie dazu den Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix.

Zielelement 7.2 – Basen endlich erzeugter Vektorräume

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

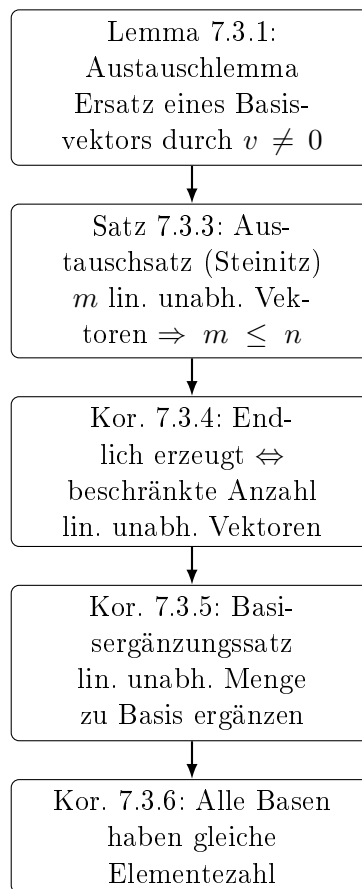
- die Definition einer Basis auswendig kennen,
- die Standardbasen der wichtigsten Vektorräume (K^n , $M_{mn}(K)$, Polynome) angeben können,
- Proposition 7.2.7 (Charakterisierung von Basen durch eindeutige Linearkombinationsdarstellung) kennen und im Beweis nutzen können,
- verstehen, wie man aus einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis gewinnt (Proposition 7.2.8).

Selbstkontrollelement 7.2

Zeigen Sie, dass $1 + T$, $1 - T$ eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad ≤ 1 über \mathbb{R} ist. Warum ist $1 + T$, $1 - T$, 2 keine Basis?

Zielelement 7.3 – Der Austauschsatz von Steinitz

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

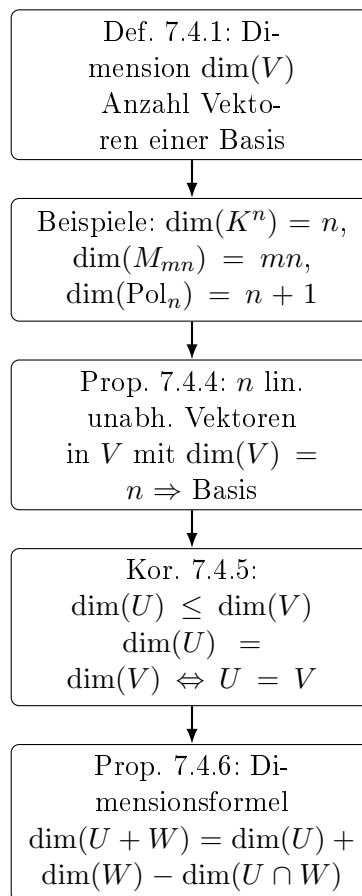
- das Austauschlemma (7.3.1) und den Austauschsatz (7.3.3) in eigenen Worten erklären können,
- den Basisergänzungssatz (7.3.5) kennen und anwenden können,
- begründen können, warum je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Elemente haben (7.3.6).

Selbstkontrollelement 7.3

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Ergänzen Sie $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von V . Wie viele Vektoren müssen Sie hinzufügen?

Zielelement 7.4 – Dimension und Dimensionsformeln

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

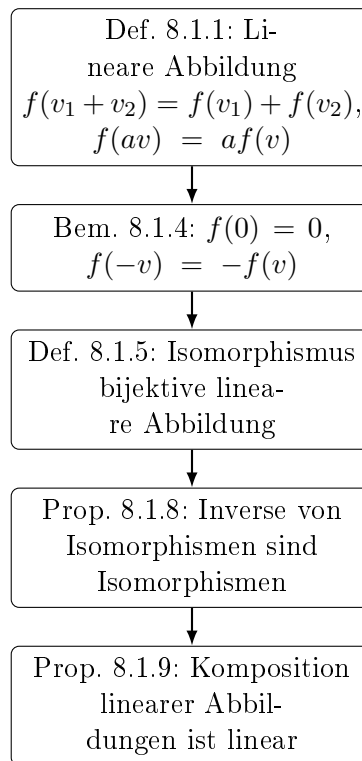
- die Dimension eines Vektorraums definieren und für die Standardbeispiele angeben können,
- Proposition 7.4.4 kennen und als Arbeitserleichterung einsetzen können (nur eine der beiden Basiseigenschaften nachweisen),
- die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt (Prop. 7.4.6) beherrschen und den Beweisaufbau skizzieren können.

Selbstkontrollelement 7.4

Seien $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $W = \langle e_2, e_3 \rangle$ Unterräume von \mathbb{R}^3 . Bestimmen Sie $\dim(U + W)$ und $\dim(U \cap W)$ mithilfe der Dimensionsformel.

Zielelement 8.1 – Lineare Abbildungen: Definition und Eigenschaften

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

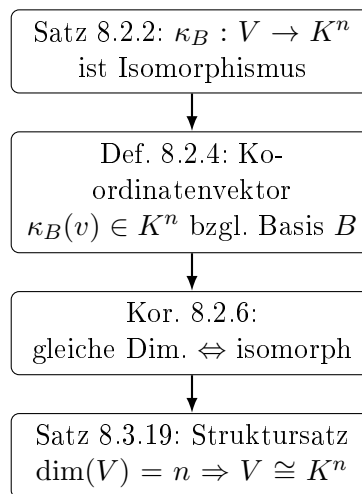
- lineare Abbildungen erkennen und die Linearitätsbedingungen nachweisen können,
- die elementaren Eigenschaften linearer Abbildungen (Nullvektor, negierter Vektor) aus den Axiomen herleiten können,
- den Begriff des Isomorphismus kennen und verstehen, warum inverse und zusammengesetzte Isomorphismen wieder Isomorphismen sind.

Selbstkontrollelement 8.1

Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung? Begründen Sie.

Zielelement 8.2 – Isomorphe Vektorräume

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

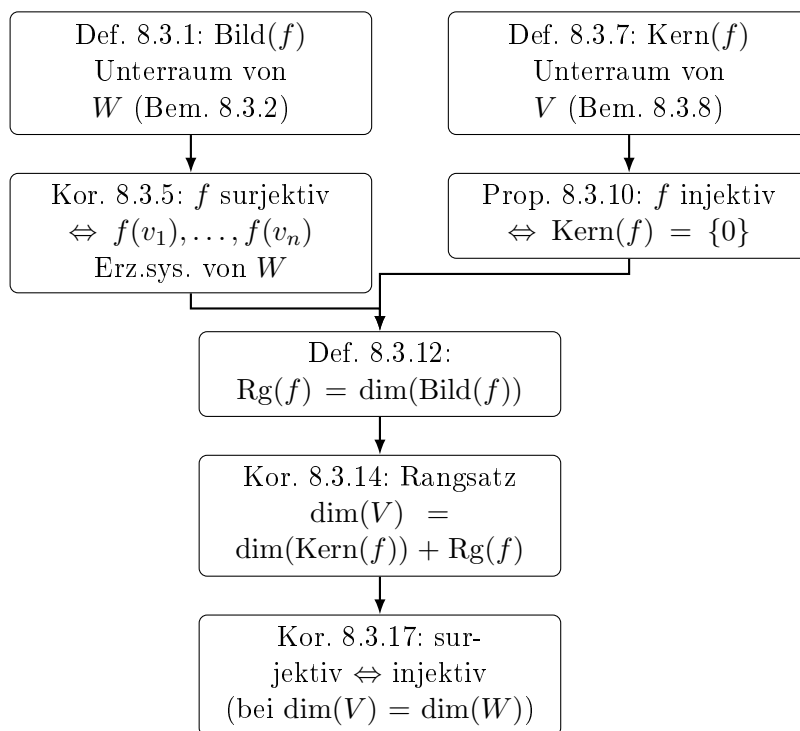
- den Koordinatenvektor eines Vektors bezüglich einer Basis bestimmen können,
- die Abbildung κ_B als Isomorphismus verstehen und erklären können,
- wissen, dass zwei endlich erzeugte Vektorräume genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Selbstkontrollelement 8.2

Sei $B = (1 + T, T)$ eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad ≤ 1 über \mathbb{R} . Bestimmen Sie $\kappa_B(3 + 2T)$.

Zielelement 8.3 – Kern, Bild und Rangsatz

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

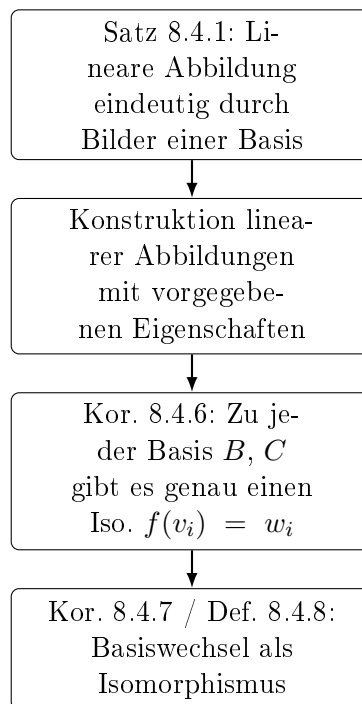
- Kern und Bild einer linearen Abbildung berechnen können,
- Injektivität über den Kern und Surjektivität über das Bild charakterisieren können,
- den Rangsatz kennen, beweisen und auf konkrete Beispiele anwenden können,
- Korollar 8.3.17 (surjektiv \Leftrightarrow injektiv) als Arbeitserleichterung nutzen.

Selbstkontrollelement 8.3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Rg}(f)$. Verifizieren Sie den Rangsatz.

Zielelement 8.4 – Lineare Abbildungen und Basen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

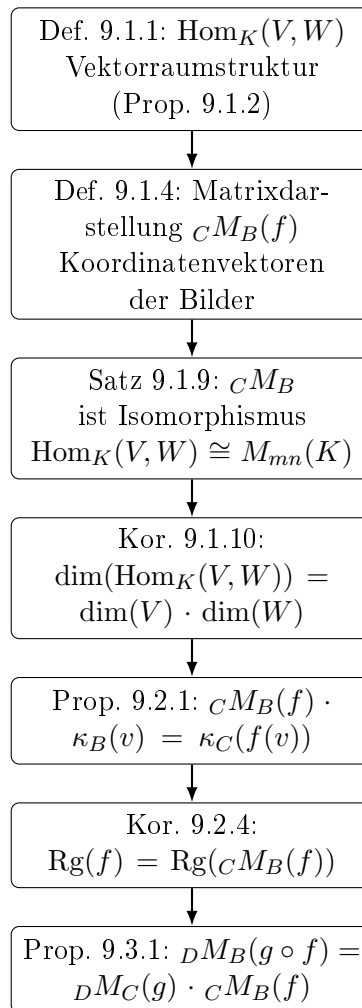
- Satz 8.4.1 kennen und zur Konstruktion linearer Abbildungen mit vorgegebenen Eigenschaften einsetzen können,
- verstehen, warum eine lineare Abbildung vollständig durch ihre Werte auf einer Basis festgelegt ist,
- den Begriff des Basiswechsels (Def. 8.4.8) erklären können.

Selbstkontrollelement 8.4

Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Geben Sie eine explizite Formel für f an.

Zielelement 9 – Lineare Abbildungen und Matrizen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie:

- die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung bezüglich gegebener Basen berechnen können,
- die zentrale Formel $CM_B(f) \cdot \kappa_B(v) = \kappa_C(f(v))$ verstehen und anwenden können,
- wissen, dass Matrizenmultiplikation der Komposition linearer Abbildungen entspricht (Prop. 9.3.1),
- die Dimensionsformel $\dim(\text{Hom}_K(V, W)) = mn$ kennen.

Selbstkontrollelement 9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $EM_E(f)$ bezüglich der Standardbasis E von \mathbb{R}^2 . Was ist $\text{Rg}(f)$?