Glossar zu Lektion 3

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln, Sätze und Propositionen der dritten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

7.1 Lineare Unabhängigkeit

7.1.1 Definition (Triviale / nicht-triviale Darstellung)

Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

- Die Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ heißt **triviale Darstellung** des Nullvektors, wenn $a_i = 0$ für alle i.
- Sie heißt **nicht-triviale Darstellung**, wenn mindestens ein $a_i \neq 0$ ist.

7.1.2 Definition (Linear unabhängig / linear abhängig)

Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \implies a_i = 0 \text{ für alle } i.$$

Sie heißen **linear abhängig**, falls eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors durch $v_1, \ldots, v_n$ existiert.

Spezialfälle: Ein einzelner Vektor v ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$. Zwei Vektoren v_1, v_2 sind linear abhängig genau dann, wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist.

7.1.6 Proposition (Charakterisierung linear abhängiger Vektoren)

$v_1, \ldots, v_n \in V$ sind linear abhängig genau dann, wenn es ein i gibt, so dass

$$v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle.$$

Kriterium: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ (Spalten = Vektoren) den Rang n hat.

7.2 Basen endlich erzeugter Vektorräume

7.2.1 Definition (Basis)

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen eine **Basis** von V, falls sie ein Erzeugendensystem von V sind und linear unabhängig sind.

Die **leere Menge** $\emptyset$ ist per Definition die Basis von $\{0\}$.

7.2.4–7.2.6 Standardbasen

- K^n: Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ (kanonische Basis).
- $M_{mn}(K)$: Matrizen E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Polynome vom Grad $\leq n$: $e_0 = 1$, $e_1 = T, \ldots, e_n = T^n$.

7.2.7 Proposition (Charakterisierung von Basen)

$v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von V genau dann, wenn sich jedes $v \in V$ **eindeutig** als Linearkombination $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ schreiben lässt.

7.2.8 Proposition (Existenz von Basen)

Sei $V \neq \{0\}$ endlich erzeugt.

(a) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem und gilt $v_i \in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$, so ist $v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n$ ebenfalls ein Erzeugendensystem.

(b) Jedes endliche Erzeugendensystem enthält eine Basis.

7.2.11 Bemerkung

Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(a) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und gilt $v_{n+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, so sind $v_1, \ldots, v_{n+1}$ linear unabhängig.

(b) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so sind $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ für alle $v_{n+1} \in V$ linear abhängig.

7.3 Der Austauschsatz von Steinitz

7.3.1 Lemma (Austauschlemma)

Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V und sei $v \in V$, $v \neq 0$. Dann gibt es ein i mit $1 \leq i \leq n$, so dass

$$u_1, \ldots, u_{i-1},\ v,\ u_{i+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V ist. (Austausch: Der Basisvektor u_i wird durch v ersetzt, wenn der Koeffizient von u_i in der Darstellung von v bzgl. der Basis ungleich Null ist.)

7.3.3 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V und seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann gilt $n \geq m$, und es gibt Vektoren $u_{i_{m+1}}, \ldots, u_{i_n} \in \{u_1, \ldots, u_n\}$, so dass

$$v_1, \ldots, v_m,\ u_{i_{m+1}}, \ldots, u_{i_n}$$

eine Basis von V ist.

7.3.4 Korollar (Charakterisierung endlich erzeugter Vektorräume)

V ist endlich erzeugt genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jede Menge von linear unabhängigen Vektoren in V höchstens n Elemente besitzt.

7.3.5 Korollar (Basisergänzungssatz)

Sei V endlich erzeugt und seien $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig in V. Dann lassen sich $w_1, \ldots, w_m$ zu einer Basis von V ergänzen: Es gibt $v_{m+1}, \ldots, v_n$, so dass $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

7.3.6 Korollar (Eindeutigkeit der Basismächtigkeit)

Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V haben die gleiche Anzahl von Vektoren.

7.4 Dimension

7.4.1 Definition (Dimension)

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) $\dim_K(V) = \infty$, falls V nicht endlich erzeugt ist.

(b) $\dim_K(V) = n$, falls $V \neq \{0\}$ endlich erzeugt ist und jede Basis aus n Vektoren besteht.

(c) $\dim_K(\{0\}) = 0$.

Beispiele: $\dim(K^n) = n$, $\dim(M_{mn}(K)) = mn$, $\dim(\mathrm{Pol}_{\leq n}) = n + 1$.

7.4.4 Proposition

Sei $\dim(V) = n < \infty$.

(a) n linear unabhängige Vektoren in V bilden bereits eine Basis.

(b) Ein Erzeugendensystem von V mit genau n Vektoren ist bereits eine Basis.

Merke: Bei bekannter Dimension genügt der Nachweis *einer* der beiden Basiseigenschaften.

7.4.5 Korollar (Dimensionsformel für Unterräume)

Sei U ein Unterraum des endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt

$$\dim(U) \leq \dim(V),$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $U = V$.

7.4.6 Proposition (Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt)

Seien U und W endlichdimensionale Unterräume von V. Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Beweisskizze: Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $U \cap W$ durch $u_1, \ldots, u_s$ zu Basis von U und durch $w_1, \ldots, w_t$ zu Basis von W ergänzen; dann ist $x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t$ eine Basis von $U + W$.

8.1 Lineare Abbildungen: Definition und Eigenschaften

8.1.1 Definition (Lineare Abbildung / Vektorraumhomomorphismus)

Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **(K-)linear**, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ und $a \in K$ gilt:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \qquad f(av) = af(v).$$

Äquivalent: $f(\sum a_i v_i) = \sum a_i f(v_i)$ (Bild 8.1.11).

8.1.4 Bemerkung (Elementare Eigenschaften)

Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

(a) $f(0_V) = 0_W$.

(b) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

8.1.5 Definition (Isomorphismus)

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **Isomorphismus**. Man schreibt $V \cong W$ und nennt V und W **isomorph**.

8.1.8 Proposition

Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

8.1.9 Proposition (Komposition)

Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : U \to W$ linear. Sind f und g Isomorphismen, so auch $g \circ f$ (Kor. 8.1.10).

8.2 Isomorphe Vektorräume

8.2.2 Satz (Struktur endlich erzeugter Vektorräume)

Sei V endlich erzeugt und sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Die Abbildung

$$\kappa_B : V \to K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \;\mapsto\; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus.

8.2.4 Definition (Koordinatenvektor)

Sei B eine Basis von V und $v \in V$. Dann heißt $\kappa_B(v) \in K^n$ der **Koordinatenvektor** von v bezüglich B.

8.2.6 Korollar

Seien V und W endlich erzeugte K-Vektorräume.

(a) $V \cong W \;\Leftrightarrow\; \dim(V) = \dim(W)$.

(b) $\dim(V) = n \;\Rightarrow\; V \cong K^n$.

8.3 Kern und Bild

8.3.1 Definition (Bild)

Sei $f : V \to W$ linear. Das **Bild** von f ist

$$\mathrm{Bild}(f) = \{w \in W \mid \exists\, v \in V : f(v) = w\}.$$

$\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W (Bem. 8.3.2). Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ (Prop. 8.3.4).

8.3.5 Korollar

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist f surjektiv genau dann, wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

8.3.7 Definition (Kern)

Sei $f : V \to W$ linear. Der **Kern** von f ist

$$\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

$\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V (Bem. 8.3.8).

8.3.10 Proposition

$f : V \to W$ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

8.3.12 Definition (Rang einer linearen Abbildung)

$\mathrm{Rg}(f) := \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

8.3.13 Satz

Sei $\dim(V) = n$, sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und sei $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

8.3.14 Korollar (Rangsatz)

Sei V endlich erzeugt und $f : V \to W$ linear. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{Rg}(f).$$

8.3.17 Korollar

Seien V, W endlich erzeugt mit $\dim(V) = \dim(W)$, und sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$f \text{ surjektiv} \iff f \text{ injektiv} \iff f \text{ bijektiv (Isomorphismus)}.$$

8.3.18 Korollar

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $f : V \to W$ linear.

(a) f injektiv $\Leftrightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ Erzeugendensystem von W.

(c) f bijektiv $\Leftrightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ Basis von W.

8.3.19 Satz (Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume)

Seien V, W endlich erzeugte K-Vektorräume.

(a) $V \cong W \;\Leftrightarrow\; \dim(V) = \dim(W)$.

(b) $\dim(V) = n \;\Rightarrow\; V \cong K^n$.

8.4 Lineare Abbildungen und Basen

8.4.1 Satz (Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis)

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig. Dann gibt es **genau eine** lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Merke: Eine lineare Abbildung ist vollständig durch ihre Werte auf einer Basis bestimmt.

8.4.6 Korollar

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$, und seien $v_1, \dots, v_n$ bzw. $w_1, \dots, w_n$ Basen von V bzw. W. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$.

8.4.8 Definition (Basiswechsel)

Sei V endlich erzeugt und seien B, B' zwei Basen von V. Der eindeutige Isomorphismus, der B in B' überführt, heißt **Basiswechsel** (oder Basistransformation) von B nach B'.

9.1 Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

9.0.1 Definition (System von Vektoren)

Ein **System** von n Vektoren $(v_1, \dots, v_n)$ in V ist ein geordnetes n-Tupel. Im Gegensatz zur Menge ist die Reihenfolge wesentlich. Basen werden als Systeme notiert.

9.1.1 Definition ($\mathrm{Hom}_K(V, W)$)

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W, versehen mit punktweiser Addition $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ und Skalarmultiplikation $(af)(v) = af(v)$.

9.1.2 Proposition

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein K-Vektorraum. Das neutrale Element ist die Nullabbildung $0 : v \mapsto 0$.

9.1.4 Definition (Matrixdarstellung)

Seien $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $C = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W, und sei $f : V \to W$ linear. Schreibe $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Die **Matrixdarstellung** von f bezüglich B und C ist

$$_C M_B(f) = (a_{ij}) \in M_{mn}(K),$$

wobei die j-te Spalte der Koordinatenvektor von $f(v_j)$ bzgl. C ist.

9.1.9 Satz (Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen)

Die Abbildung $_C M_B : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{mn}(K)$ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist jeder $m \times n$-Matrix A genau eine lineare Abbildung f_A zugeordnet.

9.1.10 Korollar (Dimensionsformel für Homomorphismenräume)

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

9.2 Koordinatenvektoren und Matrixdarstellungen

9.2.1 Proposition

Seien B Basis von V, C Basis von W und $f : V \to W$ linear. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$_C M_B(f) \cdot \kappa_B(v) = \kappa_C(f(v)).$$

Merke: Multiplikation der Matrixdarstellung mit dem Koordinatenvektor liefert den Koordinatenvektor des Bildvektors.

9.2.3 Korollar

Kern(f) ist isomorph zur Lösungsmenge U des homogenen linearen Gleichungssystems $_C M_B(f)\, x = 0$. Insbesondere: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(U) = n - \mathrm{Rg}(_C M_B(f))$.

9.2.4 Korollar

$\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(_C M_B(f))$. Rang der linearen Abbildung = Rang ihrer Matrixdarstellung.

9.2.5 Korollar

Sei $A \in M_{mn}(K)$ mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt

$$\mathrm{Rg}(A) = \dim\langle v_1, \ldots, v_n\rangle.$$

Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix stimmen überein.

9.3 Matrizenprodukt und Komposition

9.3.1 Proposition (Matrizenmultiplikation = Komposition)

Seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ linear, und seien B, C, D Basen von V, W bzw. X. Dann gilt

$$_D M_B(g \circ f) = {_D M_C(g)} \cdot {_C M_B(f)}.$$

Merke: Matrizenmultiplikation entspricht der Komposition linearer Abbildungen.

9.3.2 Aufgabe/Korollar (Inverse und Matrixdarstellung)

Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann gilt

$$_C M_B(f)^{-1} = {_B M_C(f^{-1})}.$$

Invertierbarkeit der Matrixdarstellung entspricht dem Isomorphismus.

9.3.3 Korollar

Seien $A' \in M_{ms}(K)$, $A'' \in M_{sn}(K)$ und $A = A'A''$. Dann gilt

$$\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A') \quad \text{und} \quad \mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A'').$$