

# Einsendeaufgaben – Lektion 3

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

## Aufgabe 3.4

b) „ $\Rightarrow$ “-Richtung:

Sei  $x = y$ . Nach der Eigenschaft einer Abbildung folgt direkt  $f(x) = f(y)$ .

„ $\Leftarrow$ “-Richtung:

Beweis durch Kontraposition.

Sei  $x \neq y$ . Fallunterscheidung nach linearer Unabhängigkeit:

**Fall 1:**  $x$  und  $y$  sind linear abhängig.

Es gibt also ein  $k \in \mathbb{K}$  mit  $k \neq 0$ , sodass  $y = k \cdot x$ . Wegen  $x \neq y$  muss ebenfalls  $k \neq 1$  gelten.

Wir definieren eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(x) \neq 0$  (für Satz a). Es gilt also  $f(x) \neq 0$ . Damit können wir folgern:

$$f(y) = f(k \cdot x) = k \cdot f(x) \neq f(x)$$

wegen  $k \neq 0$ ,  $k \neq 1$ ,  $f(x) \neq 0$  und  $f(x), f(y) \in \mathbb{K}$ .

**Fall 2:**  $x$  und  $y$  sind linear unabhängig.

Nach Korollar 7.3.5 lässt sich  $x$  und  $y$  zu einer Basis  $\{v_1, \dots, x, \dots, y, \dots, v_m\}$  ergänzen.

Da ein Körper aus mindestens zwei Elementen  $k_1$  und  $k_2$  besteht, definieren wir

$$f_B: \{v_1, \dots, x, \dots, y, \dots, v_m\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad v \mapsto \begin{cases} k_1, & v \neq y \\ k_2, & v = y \end{cases}$$

Wir führen dann  $f_B$  zu einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  fort.

Nach der Definition von  $f_B$  gilt dann  $f(x) \neq f(y)$ .

c) Da  $V$  endlich dimensional ist, ist laut der Definition 7.4.1  $\dim(V) = n < \infty$  mit  $n \in \mathbb{N}$  oder  $\dim(V) = 0$ . Demnach eine Fallunterscheidung:

**Fall 1:**  $\dim(V) = 0$

Nach Definition 7.4.1 gilt  $V = \{0\}$ . Wegen der Voraussetzung  $v \neq 0$  für alle  $v \in V$  sind keine Fälle zu untersuchen. Die Aussage gilt trivialerweise.

**Fall 2:**  $\dim(V) = n < \infty$

Nach Definition 7.4.1 ist  $V$  endlich erzeugt. Nach Proposition 7.2.8 lässt sich das Erzeugendensystem auf eine Basis  $v_1, \dots, v_m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  reduzieren.

Nach dem Austauschlemma existiert eine Basis  $v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m$  mit  $1 \leq i \leq m$ .

Da  $\dim(V) > 0$  gilt nach der Definition 7.4.1  $W \neq \{0\}$ , also existiert ein  $w_0 \in W$  mit  $w_0 \neq 0$ .

Wir definieren jetzt die Abbildung der Basisvektoren:

$$f_B: \{v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m\} \rightarrow W, \quad v \mapsto w_0$$

$f_B$  lässt sich zu einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  fortsetzen. Da  $f(v) = w_0 \neq 0$  gilt, stimmt die Aussage auch im zweiten Fall  $\dim(V) = n < \infty$ .