Einsendeaufgaben – Lektion 3

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 3.2

a) **Bestimmung Basis von $U \cap V$:**

$$U \cap V = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, a_1, a_2, b_1, b_2 :\; a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Also:

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Big| \; Z_{3,1}(1) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Big| \; Z_{3,2}(1)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \; \begin{matrix} Z_{1,3}\left(-\frac{1}{6}\right) \\ Z_{2,3}\left(-\frac{1}{3}\right) \\ Z_3\left(\frac{1}{6}\right) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Multipliziere Kennziffern und entnehmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{für alle } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gilt die homogene Gleichung.

Also:

$$U \cap V = \left\{ \frac{\lambda}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ -\frac{4}{3}\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Wegen $U \cap V = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Basis von $U \cap V$.

b) **Bestimmung Basis von $U + V$:**

Wegen a) und

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

folgt $\dim(U + V) = 3$. $\quad (\dim(U) = \dim(V) = 2)$

Da $U+V$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und $\dim(U+V) = \dim(\mathbb{R}^3)$ gilt, folgt $U+V = \mathbb{R}^3$.

Die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sind also eine Basis von $U + V$.