Einsendeaufgaben – Lektion 3

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 3.1

a)

$$a_1(-u) + a_2(u+v+w) = (-a_1+a_2)\,u + a_2\,v + a_2\,w = 0$$

Da u, v, w linear unabhängig ist, muss $a_2 = 0$ sein. Außerdem muss $-a_1 + a_2 = 0$ sein. Wegen $a_2 = 0$ muss $a_1 = 0$ sein.

$\Rightarrow$ $-u$, $u+v+w$ sind linear unabhängig.

b)

$$a_1(u+v) + a_2(v+w) + a_3(v-w) = a_1\,u + (-a_1+a_2+a_3)\,v + (a_2-a_3)\,w = 0$$

Wegen linearer Unabhängigkeit muss $a_1 = 0$ sein. Aus $-a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 = 0$ und $a_2 = a_3$ wegen $a_2 - a_3 = 0$ folgt $a_2 = a_3 = 0$.

$\Rightarrow$ $u+v$, $v+w$, $v-w$ linear unabhängig.

c)

$$a_1(u-v) + a_2(u-w) + a_3(v-w) = (a_1+a_2)\,u + (-a_1+a_3)\,v + (-a_2-a_3)\,w$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Lösung durch Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \;\Big|\; Z_{2,1}(1) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \;\Big|\; Z_{3,2}(1) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 Pivot-Positionen

$\Rightarrow$ linear abhängig