

Studierhinweise zu Lektion 2

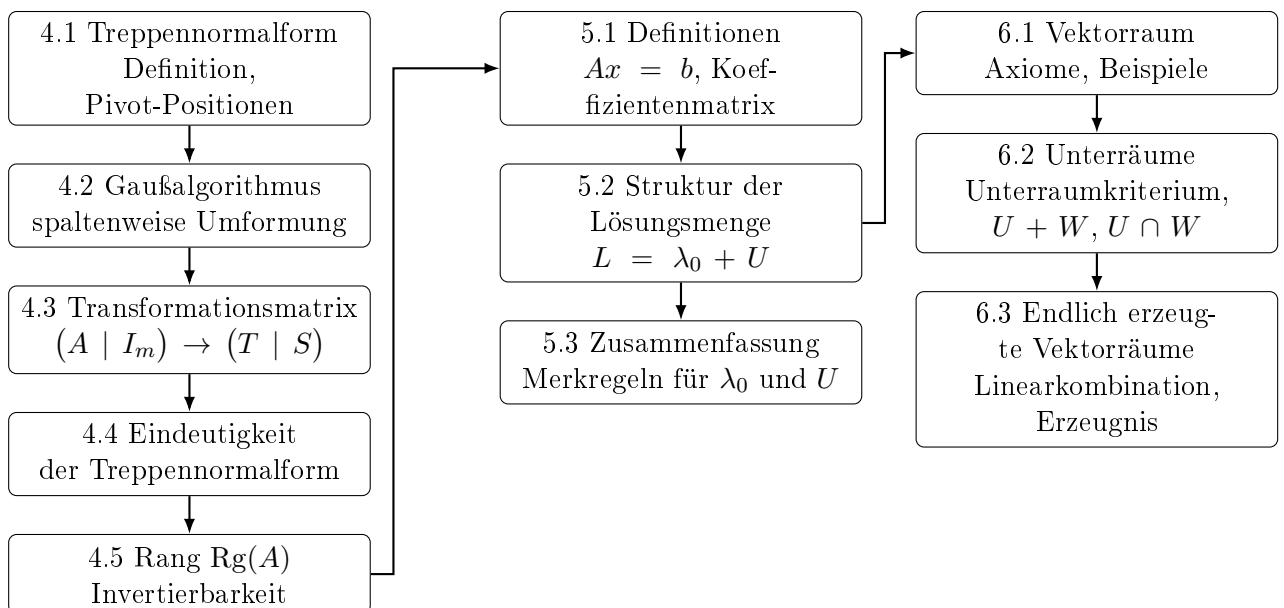
Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

In dieser Lektion beginnt die eigentliche Lineare Algebra. Das zentrale Handwerkzeug ist der **Gaußalgorithmus** (Kapitel 4), mit dem Matrizen in Treppennormalform überführt werden. Er bildet die Grundlage für das Lösen linearer Gleichungssysteme (Kapitel 5) und für den abstrakten Begriff des Vektorraums (Kapitel 6), der das gesamte weitere Studium durchzieht.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen der Gaußalgorithmus und die Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme – beide müssen Sie *aktiv* beherrschen, nicht nur passiv verstehen. Rechnen Sie viele Beispiele, nutzen Sie die Maple-Apps in der Moodle-Lernumgebung, und arbeiten Sie die Aufgaben im Lehrtext durch.

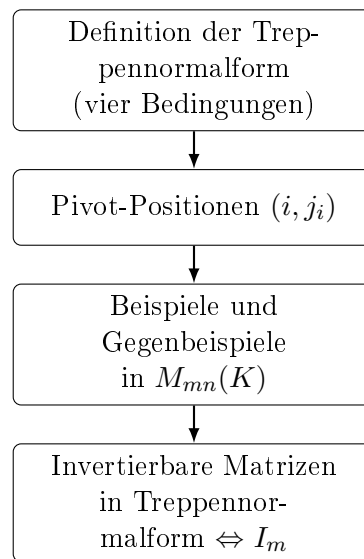
Struktur der Lektion 2

Kapitel 4: Gaußalgorithmus **Kapitel 5: Lin. Gleichungssysteme** **Kapitel 6: Vektorräume**



Zielelement 4.1 – Treppennormalformen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die vier Bedingungen der Treppennormalform kennen und auf konkrete Matrizen anwenden können,
- entscheiden können, ob eine gegebene Matrix in Treppennormalform ist, und gegebenenfalls die Pivot-Positionen angeben,
- wissen, dass die einzige invertierbare Matrix in Treppennormalform die Einheitsmatrix ist.

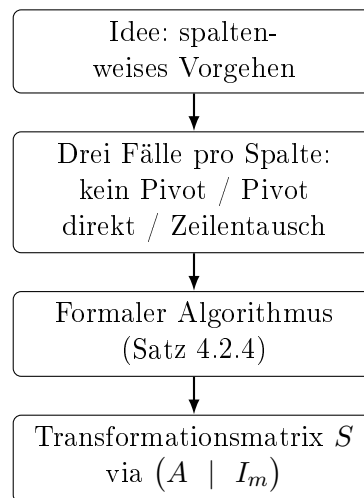
Selbstkontrollelement 4.1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in Treppennormalform sind, und geben Sie jeweils die Pivot-Positionen an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zielelement 4.2 – Der Gaußalgorithmus

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- den Gaußalgorithmus sicher und fehlerfrei auf beliebige Matrizen anwenden können,
- die Transformationsmatrix S mit $SA = T$ (Treppennormalform) berechnen,
- wissen, dass die Treppennormalform eindeutig ist (Satz 4.4.2), das Produkt S der Elementarmatrizen aber nicht.

Selbstkontrollelement 4.2

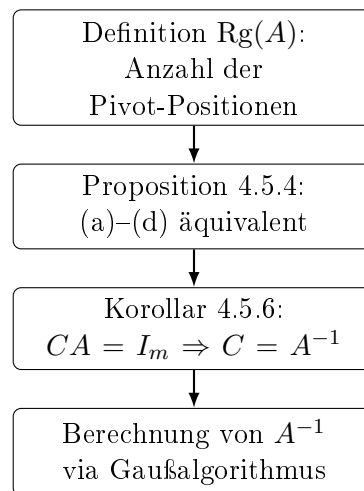
Überführen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in Treppennormalform und berechnen Sie dabei gleichzeitig die invertierbare Matrix S mit $SA = T$.

Zielelement 4.5 – Rang und Invertierbarkeit

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

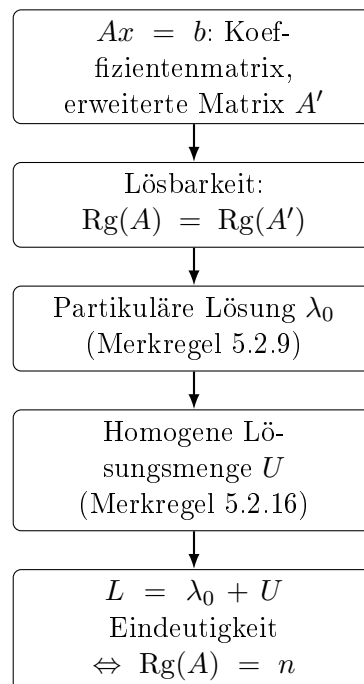
- den Rang einer Matrix berechnen können,
- die vier äquivalenten Charakterisierungen invertierbarer Matrizen (Proposition 4.5.4) kennen und einsetzen können,
- Korollar 4.5.6 verstehen: aus $CA = I_m$ folgt bereits die volle Invertierbarkeit,
- die Inverse einer invertierbaren Matrix mit dem Gaußalgorithmus berechnen.

Selbstkontrollelement 4.5

Untersuchen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls A^{-1} mit dem Gaußalgorithmus.

Zielelement 5 – Lineare Gleichungssysteme

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie:

- entscheiden können, ob ein lineares Gleichungssystem lösbar ist (Vergleich der Ränge von A und A'),
- eine partikuläre Lösung mit der Merkregel 5.2.9 ablesen können,
- die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems mit Merkregel 5.2.16 bestimmen können,
- die vollständige Lösungsmenge als $\lambda_0 + U$ angeben und wissen, wann das System genau eine Lösung hat.

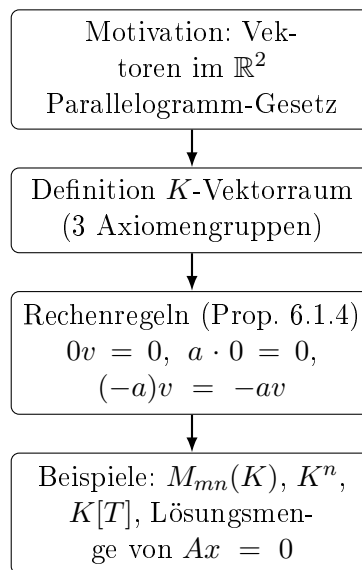
Selbstkontrollelement 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zielelement 6.1 – Vektorräume

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

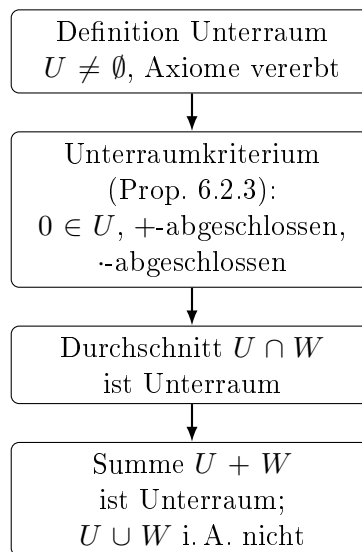
- die Definition eines K -Vektorraums kennen und an neuen Beispielen überprüfen können,
- die Rechenregeln aus Proposition 6.1.4 aus den Axiomen herleiten können,
- die wichtigsten Beispiele für Vektorräume (insbesondere K^n , $M_{mn}(K)$ und Lösungsmengen homogener Gleichungssysteme) kennen.

Selbstkontrollelement 6.1

Ist die Menge $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ mit der üblichen punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein \mathbb{R} -Vektorraum? Überprüfen Sie die Axiome.

Zielelement 6.2 – Unterräume

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

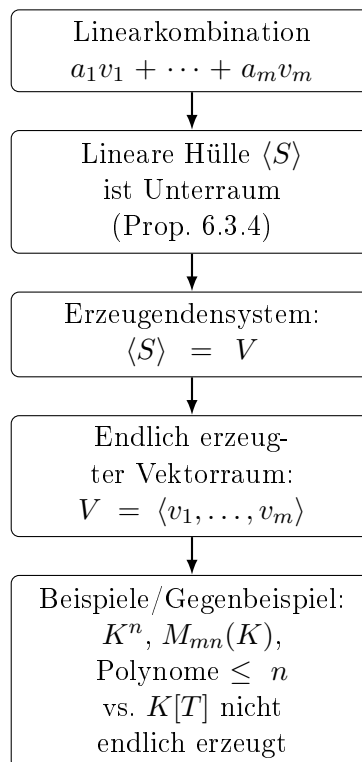
- das Unterraumkriterium anwenden können, um Unterräume zu erkennen oder zu widerlegen,
- wissen, dass $U \cap W$ und $U + W$ Unterräume sind, $U \cup W$ aber im Allgemeinen nicht,
- Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme als Unterräume von K^n einordnen können.

Selbstkontrollelement 6.2

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \right\}$. Zeigen Sie mit dem Unterraumkriterium, dass U ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ist.

Zielelement 6.3 – Endlich erzeugte Vektorräume

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- Linearkombinationen bilden und die lineare Hülle einer Menge beschreiben können,
- nachweisen oder widerlegen können, dass eine Menge S ein Erzeugendensystem von V ist (durch Lösung eines linearen Gleichungssystems),
- endlich erzeugte Vektorräume von nicht endlich erzeugten unterscheiden,
- verstehen, warum $K[T]$ nicht endlich erzeugt ist.

Selbstkontrollelement 6.3

Liegt der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koeffizienten.