Glossar zu Lektion 2

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkregeln und Sätze der zweiten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

4.1 Treppennormalformen

4.1.1 Treppennormalform

Eine Matrix $A \in M_{mn}(K)$ ist in **Treppennormalform**, wenn A die Nullmatrix ist oder wenn es r Spaltenindizes $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ gibt, sodass für alle $1 \leq i \leq r$ gilt:

(i) $a_{ij_i} = 1$ (Pivot-Eintrag),

(ii) $a_{lj_i} = 0$ für alle $l \neq i$ (Nullen in der Pivot-Spalte),

(iii) $a_{il} = 0$ für alle $l < j_i$ (Nullen links des Pivots),

(iv) $a_{kl} = 0$ für alle $k > r$ und alle $1 \leq l \leq n$ (Nullzeilen am Ende).

4.1.2 Pivot-Positionen

Die Paare $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (r, j_r)$ der Treppennormalform heißen **Pivot-Positionen** (gesprochen: Pivo-Positionen).

4.2 Der Gaußalgorithmus

4.2 Gaußalgorithmus

Systematisches Verfahren, das jede Matrix $A \in M_{mn}(K)$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Treppennormalform überführt. Man arbeitet spaltenweise von links nach rechts:

1. Falls alle Einträge $a_{it} = 0$ für $i \geq r$: Spalte überspringen.
2. Falls $a_{rt} \neq 0$: Zeile r auf 1 normieren, dann alle anderen Einträge in Spalte t auf 0 bringen.
3. Falls $a_{rt} = 0$, aber $a_{it} \neq 0$ für ein $i > r$: Zeile r und Zeile i tauschen, dann wie in Schritt 2 vorgehen.

4.2.4 Satz (Existenz von Treppennormalformen)

Sei $A \in M_{mn}(K)$. Dann gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s \in M_{mm}(K)$, so dass $E_s E_{s-1} \cdots E_1 A$ eine Matrix in Treppennormalform ist.

4.3 Transformationsmatrix

4.3 Transformationsmatrix S

Zur Berechnung von S mit $SA = T$ (Treppennormalform) schreibt man $\bar{A} = \big(A \mid I_m\big)$ und führt auf $\bar{A}$ den Gaußalgorithmus durch. Das Ergebnis ist $\bar{A}' = \big(T \mid S\big)$.

S ist invertierbar (Produkt von Elementarmatrizen).

4.4 Eindeutigkeit der Treppennormalform

4.4.1 Lemma

Seien $T, T' \in M_{mn}(K)$ in Treppennormalform, und sei $G \in M_{mm}(K)$ invertierbar mit $GT = T'$. Dann gilt $T = T'$.

4.4.2 Satz (Eindeutigkeit der Treppennormalform)

Sei $A \in M_{mn}(K)$. Alle Matrizen in Treppennormalform, die durch elementare Zeilenumformungen aus A entstehen, sind gleich.

Man nennt diese eindeutige Matrix die **Treppennormalform zu** A.

4.4.5 Korollar

Seien $A, B \in M_{mn}(K)$. Dann gilt: A und B sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben.

4.5 Rang einer Matrix

4.5.1 Rang

Sei T die Treppennormalform zu $A \in M_{mn}(K)$. Die Anzahl der Pivot-Positionen in T heißt **Rang** von A: $\mathrm{Rg}(A)$.

4.5.4 Proposition (Invertierbare Matrizen)

Sei $A \in M_{mm}(K)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) A ist invertierbar.

(b) Die Treppennormalform zu A ist I_m.

(c) $\mathrm{Rg}(A) = m$.

(d) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

4.5.5 Proposition (Ränge von Matrizen)

Sei $A \in M_{mn}(K)$. Dann gilt:

- Ist $P \in M_{mm}(K)$ invertierbar, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(PA)$.
- Ist $Q \in M_{nn}(K)$ invertierbar, so gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(AQ)$.
- Ist $A = A'A''$, so gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A')$.

4.5.6 Korollar

Seien $A, C \in M_{mm}(K)$ mit $CA = I_m$. Dann sind C und A invertierbar, und es gilt $C = A^{-1}$.

5.1 Lineare Gleichungssysteme

5.1.1 Lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem** über K mit m Zeilen und n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form $Ax = b$, wobei $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$ die **Koeffizientenmatrix** ist.

5.1.4 Erweiterte Koeffizientenmatrix

Die $m \times (n+1)$-Matrix $A' = \big(A \mid b\big)$ heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix** von $Ax = b$.

Das Gleichungssystem heißt **homogen**, falls $b = 0$, sonst **inhomogen**.

5.2 Struktur der Lösungsmenge

5.2.1 Proposition

Sei λ_0 eine Lösung von $Ax = b$, und sei U die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$. Dann gilt:

$$L = \lambda_0 + U := \{\lambda_0 + u \mid u \in U\}.$$

5.2.3 Proposition

Sei $P \in M_{mm}(K)$ invertierbar. Die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $(PA)x = Pb$ stimmen überein.

5.2.4 Korollar

Sind A' und B' zeilenäquivalente erweiterte Koeffizientenmatrizen, so haben die zugehörigen Gleichungssysteme dieselbe Lösungsmenge.

5.2.5 Proposition (Lösbarkeit)

Das System $Ax = b$ hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A').$$

5.2.9 Merkregel (partikuläre Lösung)

Sei T in Treppennormalform, $\mathrm{Rg}(T) = \mathrm{Rg}(T')$.

1. Streiche alle Nullzeilen von T'.
2. Füge Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch wird und die Pivot-Elemente Diagonalelemente werden.

Dann steht rechts des Striches eine partikuläre Lösung λ_0.

5.2.11 Satz (Struktur der Lösungsmenge)

Sei U die Lösungsmenge von $Ax = 0$, und sei L die Lösungsmenge von $Ax = b$.

(a) $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A')$.

(b) Ist λ_0 eine Lösung, so gilt $L = \lambda_0 + U$.

(c) L und die Lösungsmenge von $Tx = d$ (Treppennormalform) stimmen überein.

5.2.14 Korollar (Eindeutige Lösung)

Besitzt $Ax = b$ eine Lösung, so ist sie genau dann eindeutig, wenn $\mathrm{Rg}(A) = n$ (Anzahl der Unbestimmten).

5.2.16 Merkregel (homogene Lösungsmenge)

Sei T in Treppennormalform, $r = \mathrm{Rg}(T) < n$.

1. Streiche alle Nullzeilen von T.
2. Füge Nullzeilen ein, sodass die Matrix quadratisch wird und Pivot-Elemente auf der Diagonalen stehen.
3. Ersetze die Nullen auf der Diagonalen durch -1.
4. Die Spalten $S_1, \ldots, S_{n-r}$, in die -1 eingefügt wurde, spannen U auf:

$$U = \{a_1 S_1 + \cdots + a_{n-r} S_{n-r} \mid a_i \in K\}.$$

Ist $r = n$, so gilt $U = \{0\}$.

6.1 Vektorräume

6.1.1 Vektorraum

Ein K-**Vektorraum** V ist eine Menge mit einer Addition $+ : V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot : K \times V \to V$, sodass folgende Axiome gelten:

(i) Addition: kommutativ, assoziativ; neutrales Element $0 \in V$; jedes $v \in V$ hat ein inverses Element $-v$.

(ii) Skalarmultiplikation: $(ab)v = a(bv)$; $\quad 1 \cdot v = v$.

(iii) Distributivgesetze: $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$; $\quad (a + b)v = av + bv$.

Elemente von V heißen **Vektoren**, Elemente von K heißen **Skalare**.

6.1.4 Proposition (Rechenregeln)

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

(a) $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.

(b) $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$.

(c) $(-a)v = -(av) = a(-v)$ für alle $a \in K$, $v \in V$.

Beispiele für Vektorräume

- $M_{mn}(K)$ mit Matrix-Addition und Skalarmultiplikation.
- $K^n = M_{n1}(K)$: Spalten der Länge n.
- Lösungsmenge U eines homogenen Systems $Ax = 0$ (Unterraum von K^n).
- $K[T]$: Polynome über K (nicht endlich erzeugt).

- Polynome vom Grad $\leq n$: endlich erzeugt.

6.2 Unterräume

6.2.1 Unterraum

Eine nicht leere Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines K-Vektorraums V heißt **Unterraum**, wenn U mit den Verknüpfungen aus V selbst ein Vektorraum ist.

6.2.3 Proposition (Unterraumkriterium)

$U \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn:

(a) $0 \in U$,

(b) $u_1 + u_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$,

(c) $au \in U$ für alle $a \in K$, $u \in U$.

6.2.7 Proposition (Durchschnitt)

Sind U und W Unterräume von V, so ist $U \cap W$ ein Unterraum von V.

6.2.9 Summe von Unterräumen

Sind U und W Unterräume von V, so ist

$$U + W := \{u + w \mid u \in U,\, w \in W\}$$

ein Unterraum von V. Es gilt $U \cup W \subseteq U + W$.

6.3 Endlich erzeugte Vektorräume

6.3.1 Linearkombination

$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ mit Koeffizienten $a_i \in K$.

6.3.2 Lineare Hülle (Erzeugnis)

Die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren aus $S \subseteq V$ heißt **lineare Hülle** oder **Erzeugnis** von S:

$$\langle S \rangle. \qquad \text{Für } S = \emptyset \text{ setzt man } \langle \emptyset \rangle := \{0\}.$$

$\langle S \rangle$ ist stets ein Unterraum von V (Prop. 6.3.4).

6.3.6 Erzeugendensystem

$S \subseteq V$ heißt **Erzeugendensystem** von V, wenn $\langle S \rangle = V$.

6.3.8 Endlich erzeugter Vektorraum

V heißt **endlich erzeugt**, wenn es eine endliche Menge $\{v_1, \ldots, v_m\}$ mit $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ gibt.

Beispiele: K^n, $M_{mn}(K)$, Polynome vom Grad $\leq n$, Lösungsmenge von $Ax = 0$.

Gegenbeispiel: $K[T]$ ist *nicht* endlich erzeugt.