

Einsendaufgaben – Lektion 2

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 2.6

Sei $S \subseteq V$. Zu zeigen: S ist Unterraum von $V \iff S = \langle S \rangle$.

(\Rightarrow) Sei S Unterraum von V . Zu zeigen: $S = \langle S \rangle$.

Per Kontraposition: Angenommen $S \neq \langle S \rangle$, dann existiert ein $v \in \langle S \rangle$ mit $v \notin S$. Da v als Linearkombination

$$v = \sum_n a_n x_n, \quad x_n \in S,$$

dargestellt werden kann, aber $v \notin S$, ist S nicht abgeschlossen unter Linearkombinationen und daher kein Unterraum. (Widerspruch)

Die drei Unterraumeigenschaften zeigen $\langle S \rangle \subseteq S$ direkt:

1. 0 liegt immer in $\langle S \rangle$ (als leere Summe), also auch $0 \in S$.
2. Sei $v, w \in S$. Wegen $S = \langle S \rangle$ folgt, dass $v + w$ als Linearkombination von Elementen aus S dargestellt werden kann (mit Koeffizienten 1 und 1), also $v + w \in \langle S \rangle = S$.
3. Sei $v \in S$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\lambda v = \lambda \sum_n a_n x_n = \sum_n (\lambda a_n) x_n \implies \lambda v \in \langle S \rangle \implies \lambda v \in S.$$

(\Leftarrow) Sei $S = \langle S \rangle$. Da $\langle S \rangle$ stets ein Unterraum ist, ist auch S ein Unterraum.