Einsendeaufgaben – Lektion 2

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 2.5

Sei A die Matrix mit den gegebenen Vektoren als Zeilen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & t & 2 \\ 0 & t+2 & 2t \end{pmatrix}.$$

Fall $t \neq 0$:

$$A \xrightarrow{Z_{2,1}(-2t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 2-2t \\ 0 & t+2 & 2t \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 2-2t \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2\left(-\frac{1}{t}\right),\, Z_3\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t}-2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t}-2 \\ 0 & 0 & 3-\frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_{1,2}(-1),\, Z_{2,3}\left(-\frac{2}{t}+2\right),\, Z_3\left(\frac{t}{3t-2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix besitzt 3 Pivot-Positionen. Folglich erzeugt die Teilmenge für alle $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ganz $\mathbb{R}^3$.

Fall $t = 0$:

$$A\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilentausch}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Auch hier besitzt die Matrix 3 Pivot-Positionen, die Teilmenge erzeugt also ganz $\mathbb{R}^3$.

Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass die Teilmenge ganz $\mathbb{R}^3$ erzeugt.