Einsendeaufgaben – Lektion 2

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 2.4

a) U_1 ist **kein Unterraum**. Zum Beispiel gilt

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin U_1.$$

b) U_2 ist ein **Unterraum**, da:

1. $0 \in U_2$, da $2 \cdot 0 - 0 = 0$ und $0 + 0 + 0 = 0$.
2. Zu zeigen: $\forall A, B \in U_2 : A + B \in U_2$.
   Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ beliebig. Dann gilt $A + B \in U_2$, da:

$$2(a+e) - (b+f) = (2a - b) + (2e - f) = 0 + 0 = 0,$$
$$(a+e) + (b+f) + (c+g) = (a+b+c) + (e+f+g) = 0 + 0 = 0.$$

3. Zu zeigen: $\forall A \in U_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda A \in U_2$.
   Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $\lambda A \in U_2$, da:

$$2\lambda a - \lambda b = \lambda(2a - b) = \lambda \cdot 0 = 0,$$
$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a + b + c) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

c) U_3 ist **kein Unterraum**. Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in U_3, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 2c & 1 \end{pmatrix} \notin U_3.$$

d) U_4 ist **kein Unterraum**. Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \in U_4, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \notin U_4.$$