Einsendeaufgaben – Lektion 2

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 2.2

Gauß-Elimination auf der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_{2,1}(-1),\ Z_{3,1}\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & t+8 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{array}\right)$$

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss $t+1=0$, also $t=-1$.

Dann sei $t=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & -12 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1\left(\frac{1}{2}\right),\ Z_2\left(\frac{1}{8}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{31}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine partikuläre Lösung (mit $x_3=0$):

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{31}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung der homogenen Gleichung (x_3 frei):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathcal{U} = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die vollständige Lösungsmenge ist:

$$\mathcal{L} = d + \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{31}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$