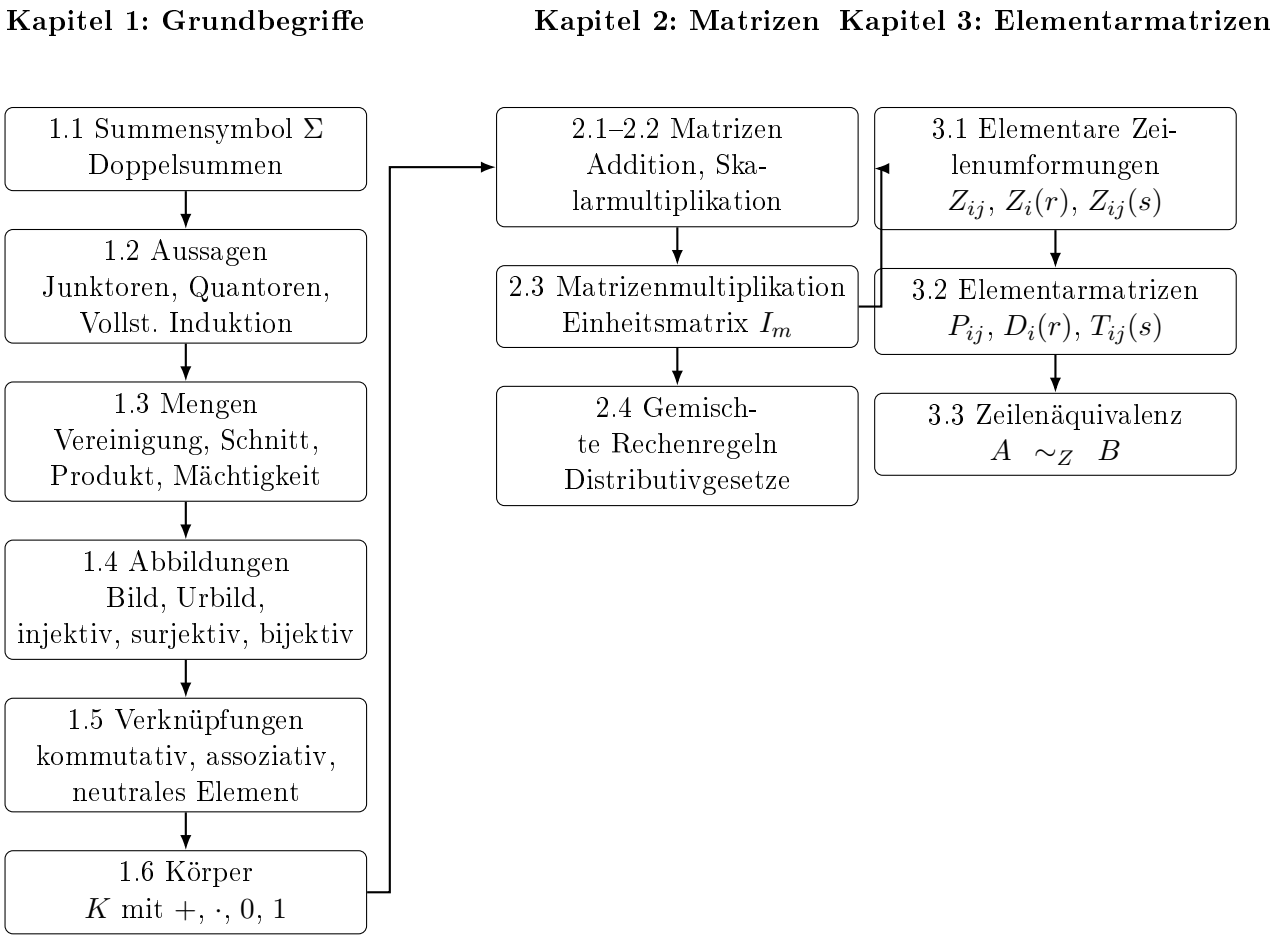
Studierhinweise zu Lektion 1

Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Diese Lektion legt die sprachlichen und begrifflichen Grundlagen für den gesamten weiteren Verlauf des Moduls. Im ersten Kapitel werden Notation und Grundbegriffe eingeführt, die in der Mathematik allgegenwärtig sind: das Summensymbol Σ, logische Junktoren und Quantoren, Mengen und Abbildungen, Verknüpfungen und Körper. In Kapitel 2 wird die Matrizenrechnung eingeführt, in Kapitel 3 werden Elementarmatrizen und elementare Zeilenumformungen behandelt.

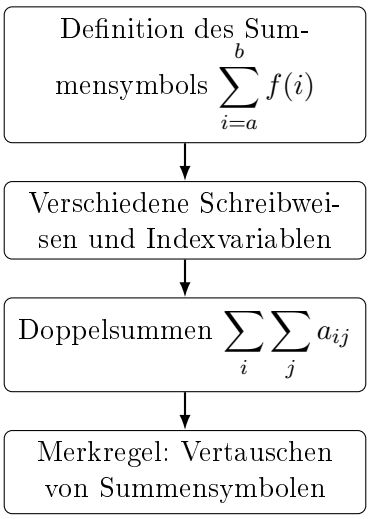
Einen mathematischen Text darf man nicht wie einen Roman lesen – man muss ihn sich *erarbeiten*. Schreiben Sie mit, stellen Sie sich Beispiele vor, und lösen Sie die Übungsaufgaben aktiv, bevor Sie in die Lösungen schauen.

Struktur der Lektion 1



Zielelement 1.1 – Das Summensymbol Σ

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

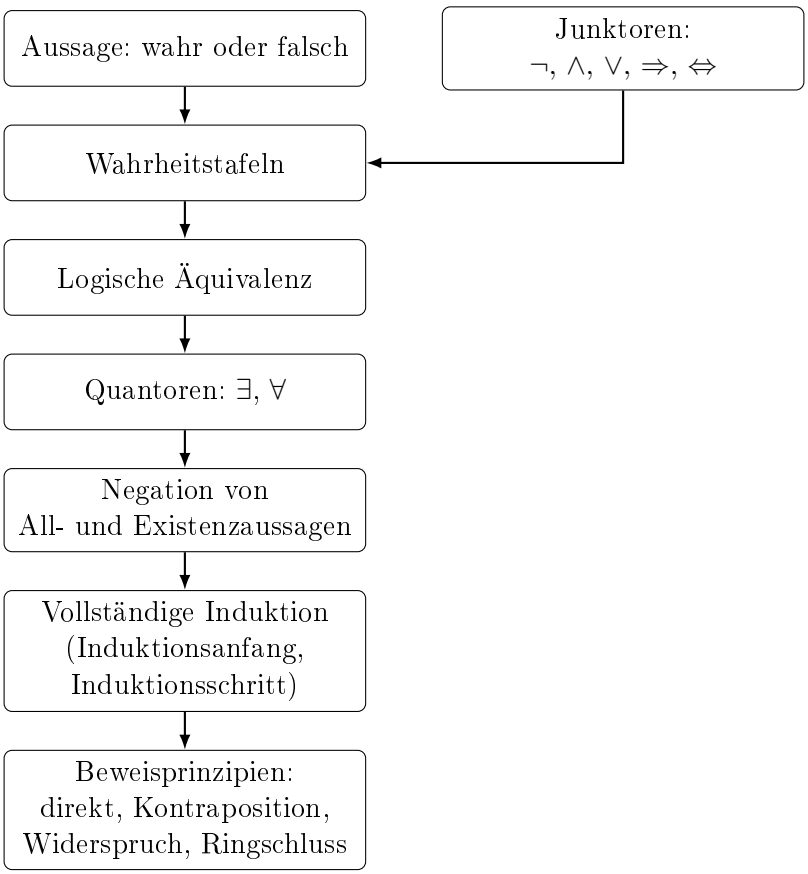
- das Summensymbol Σ lesen, schreiben und ausrechnen können,
- Summen in Sigma-Schreibweise umwandeln und umgekehrt,
- keine Angst vor Doppelsummen haben und die Merkregel 1.1.1 anwenden können (Vertauschen von Summationsreihenfolgen).

Selbstkontrollelement 1.1

Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} (i+j)$, einmal indem Sie zuerst über j und dann über i summieren, und einmal in umgekehrter Reihenfolge. Erhalten Sie dasselbe Ergebnis?

Zielelement 1.2 – Aussagen, Junktoren und Quantoren

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

- die Wahrheitstafeln der fünf Junktoren kennen und aufstellen können,
- nicht übermäßig komplexe Aussagen mit Quantoren $\exists$, $\forall$ ausdrücken und in Umgangssprache übersetzen können,
- die Negation von All- und Existenzaussagen bilden können (inkl. verschachtelter Quantoren),
- das Prinzip der vollständigen Induktion verstehen und in Beweisen anwenden können,
- die verschiedenen Beweisprinzipien (direkt, Kontraposition, Widerspruch, Ringschluss) kennen und erkennen.

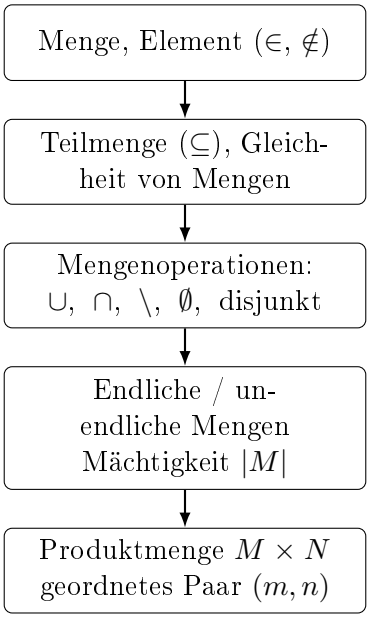
Selbstkontrollelement 1.2

Bestimmen Sie die Negation der Aussage:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Zielelement 1.3 – Mengen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

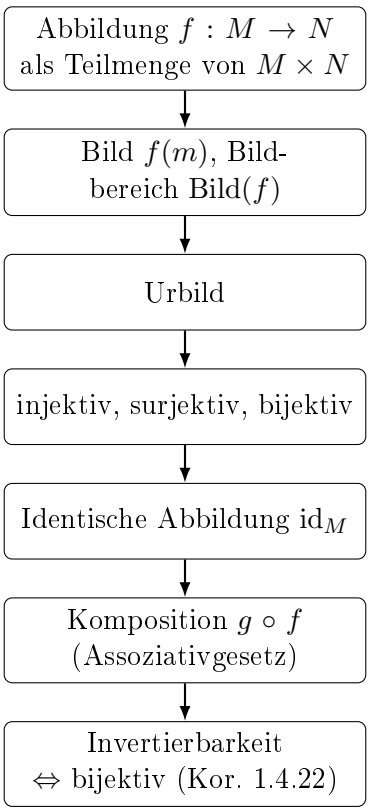
- mit den Begriffen Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge, Gleichheit und Mächtigkeit von Mengen sicher umgehen können,
- die Produktmenge $M \times N$ und geordnete Paare erklären können,
- einfache Beweise über Mengen (z. B. zur Mächtigkeit von $M \cup N$) selbstständig führen können.

Selbstkontrollelement 1.3

Seien $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{3, 4, 5, 6\}$. Bestimmen Sie $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $|M \times N|$.

Zielelement 1.4 – Abbildungen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

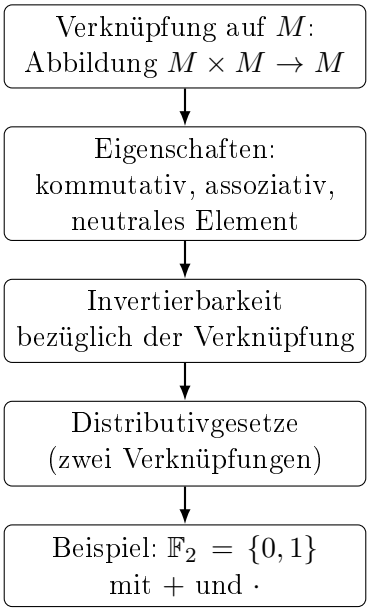
- den Abbildungsbegriff präzise formulieren und von der schulischen Beschreibung abgrenzen können,
- Bild und Urbilder von Abbildungen bestimmen können,
- die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv erklären und überprüfen können,
- die Komposition von Abbildungen ausführen und das Assoziativgesetz anwenden,
- Korollar 1.4.22 (Charakterisierung invertierbarer Abbildungen) kennen und einsetzen können.

Selbstkontrollelement 1.4

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(n) = 2n$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zielelement 1.5 – Verknüpfungen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

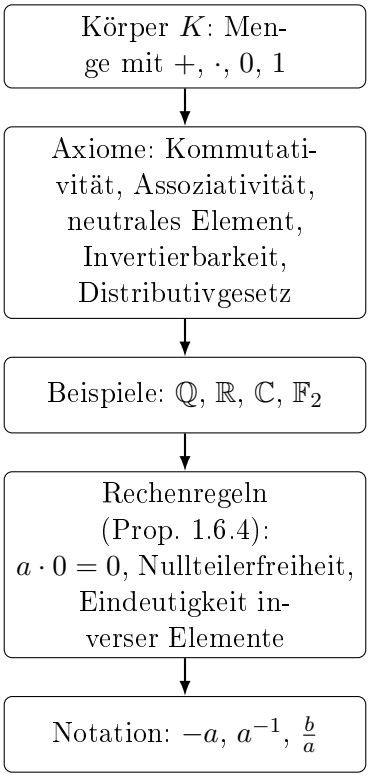
- den Begriff der Verknüpfung auf einer Menge als Abbildung verstehen,
- die Eigenschaften kommutativ, assoziativ, neutrales Element und Invertierbarkeit an konkreten Beispielen überprüfen können,
- den Körper $\mathbb{F}_2$ in- und auswendig kennen.

Selbstkontrollelement 1.5

Ist die Komposition $\circ$ auf $\mathrm{Abb}(M, M)$ kommutativ? Geben Sie ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an.

Zielelement 1.6 – Körper

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie:

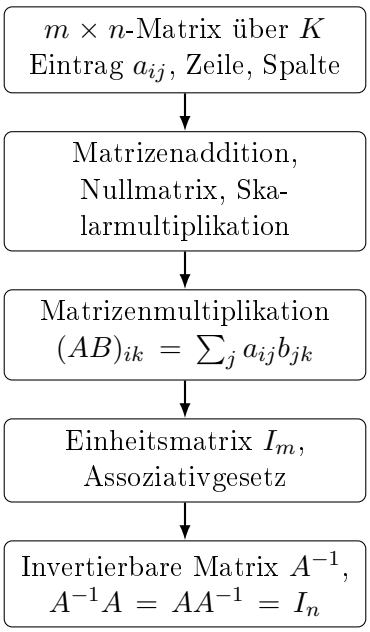
- die Definition eines Körpers auswendig kennen und an Beispielen überprüfen können,
- verstehen, warum $\mathbb{Z}$ kein Körper ist,
- die Rechenregeln in Proposition 1.6.4 aus den Körperaxiomen herleiten können,
- mit $\mathbb{F}_2$ sicher rechnen können.

Selbstkontrollelement 1.6

Beweisen Sie: In einem Körper K gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$. *Hinweis:* Verwenden Sie Bemerkung 1.6.6.

Zielelement 2 – Matrizen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie:

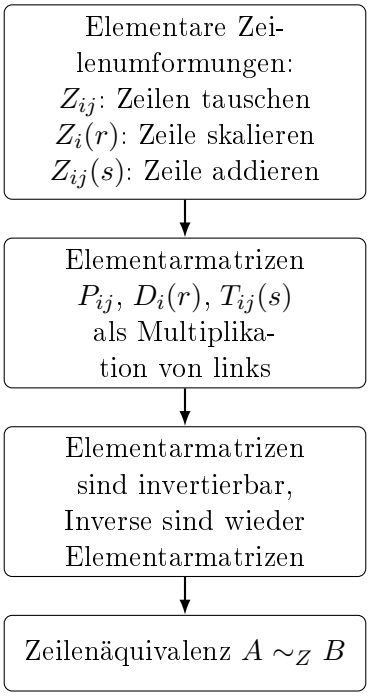
- Matrizen addieren und (wenn die Dimensionen passen) multiplizieren können,
- wissen, wann ein Produkt AB definiert ist, und die Dimensionen des Ergebnisses bestimmen können,
- die Matrizenmultiplikation als nicht kommutative Verknüpfung auf $M_{nn}(K)$ einordnen können,
- den Begriff der invertierbaren Matrix kennen.

Selbstkontrollelement 2

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie AB und BA. Sind die Ergebnisse gleich?

Zielelement 3 – Elementarmatrizen

Lerninhalte



Lernziele

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie:

- die drei Typen elementarer Zeilenumformungen kennen und anwenden können,
- wissen, welche Elementarmatrix welche elementare Zeilenumformung bewirkt (Merkregel 3.2.8),
- verstehen, dass Elementarmatrizen invertierbar sind und ihre Inversen ebenfalls Elementarmatrizen sind,
- den Begriff der Zeilenäquivalenz erklären können.

Selbstkontrollelement 3

Geben Sie die Elementarmatrizen P_{12}, $D_2(3)$ und $T_{21}(-2)$ in $M_{33}(\mathbb{R})$ explizit an. Welches sind ihre Inversen?