

# Glossar zu Lektion 1

## Mathematische Grundlagen (Modul 61111)

Dieses Glossar fasst die wesentlichen Definitionen, Merkgeln und Sätze der ersten Lektion kompakt zusammen. Nummerierungen entsprechen dem Lehrtext.

### 1.1 Das Summensymbol $\Sigma$

---

#### 1.1.1 Merkgel (Vertauschen von Doppelsummen)

Wenn Summanden vertauscht werden dürfen (d. h. wenn Klammern um Summen weggelassen werden dürfen), so gilt:

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

Die Summationsreihenfolge in Doppelsummen ist vertauschbar.

### 1.2 Aussagen

---

#### Aussage

Ein Satz der Umgangssprache, dem eindeutig die Eigenschaft *wahr* ( $w$ ) oder *falsch* ( $f$ ) zugeordnet werden kann.

#### 1.2.3 Negation $\neg A$

Die Negation von  $A$  ist die Aussage, die falsch ist, wenn  $A$  wahr ist, und wahr, wenn  $A$  falsch ist. Wahrheitstafel:

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

#### 1.2.4 Konjunktion $A \wedge B$

Genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  beide wahr sind.

$A$	$B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

#### 1.2.5 Disjunktion $A \vee B$

Genau dann wahr, wenn *mindestens eine* der Aussagen  $A$  oder  $B$  wahr ist.

$A$	$B$	$A \vee B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

### 1.2.6 Implikation $A \Rightarrow B$

Genau dann falsch, wenn  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.  $A$  heißt *Prämisse*,  $B$  heißt *Konklusion*.

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

Aus einer wahren Prämisse kann niemals etwas Falsches gefolgert werden.

### 1.2.8 Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

Genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  denselben Wahrheitswert haben.

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$w$

### 1.2.9 Wahrheitstafel

Eine Tabelle, die den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Teilaussagen auflistet.

### 1.2.13 Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen heißen **logisch äquivalent**, wenn sie dieselben Wahrheitstabellen besitzen.

Wichtige logische Äquivalenzen:

- $A \Rightarrow B$  ist äquivalent zu  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$  (Kontraposition)
- $A \Leftrightarrow B$  ist äquivalent zu  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- $\neg(A \vee B)$  ist äquivalent zu  $(\neg A) \wedge (\neg B)$  (De Morgan)
- $\neg(A \wedge B)$  ist äquivalent zu  $(\neg A) \vee (\neg B)$  (De Morgan)

### 1.2.15 Existenzquantor $\exists$

Das Symbol  $\exists$  wird durch „Es gibt ein“ (im Sinne von „Es gibt mindestens ein“) ausgedrückt. Schreibweise:  $\exists x : A(x)$ .

### 1.2.17 Allquantor $\forall$

Das Symbol  $\forall$  wird durch „Für alle“ ausgedrückt. Schreibweise:  $\forall x : A(x)$ .

### 1.2.21 Merkregel (Negation von Existenzaussagen)

Bei der Negation von  $\exists x : A$  wird der Existenzquantor in einen Allquantor umgewandelt und die Aussage  $A$  negiert:

$$\neg(\exists x : A) \equiv \forall x : \neg A.$$

### 1.2.23 Merkgel (Negation von Allaussagen)

Bei der Negation von  $\forall x : A$  wird der Allquantor in einen Existenzquantor umgewandelt und die Aussage  $A$  negiert:

$$\neg(\forall x : A) \equiv \exists x : \neg A.$$

#### Vollständige Induktion

Sei  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $A(n)$  eine Aussage für alle  $n \geq n_0$ . Wenn gilt:

- (i) **Induktionsanfang:**  $A(n_0)$  ist wahr.
- (ii) **Induktionsschritt:** Für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $A(n)$  wahr  $\Rightarrow A(n+1)$  wahr.

dann ist  $A(n)$  für alle  $n \geq n_0$  wahr.

#### Beweisprinzipien

- **Direkter Beweis:** Man nimmt  $A$  an und schließt auf  $B$ .
- **Kontraposition:** Man beweist  $\neg B \Rightarrow \neg A$  statt  $A \Rightarrow B$ .
- **Widerspruch (indirekter Beweis):** Man nimmt  $A$  und  $\neg B$  an und leitet einen Widerspruch her.
- **Ringschluss:** Um die Äquivalenz von (i), (ii), (iii) zu beweisen, genügt es, (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen.

## 1.3 Mengen

---

### 1.3.1 Teilmenge, Gleichheit, leere Menge

- $N \subseteq M$ : jedes Element von  $N$  liegt in  $M$ .
- $M = N$ :  $M \subseteq N$  und  $N \subseteq M$ .
- $\emptyset$ : die Menge ohne Elemente.

### 1.3.3 Mengenoperationen

Seien  $M, N$  Mengen.

- **Vereinigung:**  $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
- **Durchschnitt:**  $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
- **Differenz:**  $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$
- **Disjunkt:**  $M$  und  $N$  heißen disjunkt, falls  $M \cap N = \emptyset$ .

### 1.3.5 Endliche und unendliche Mengen

Eine Menge  $M$  heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente besitzt, andernfalls **unendlich**.

### 1.3.7 Mächtigkeit (Kardinalität)

$$|M| = \begin{cases} n, & \text{falls } M \text{ genau } n \text{ Elemente besitzt} \\ \infty, & \text{falls } M \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

### 1.3.9 Produktmenge

Für nicht leere Mengen  $M, N$ :

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}.$$

$(m, n)$  heißt **geordnetes Paar**;  $(m, n) = (m', n') \Leftrightarrow m = m'$  und  $n = n'$ . Für endliche Mengen gilt  $|M \times N| = |M| \cdot |N|$ .

## 1.4 Abbildungen

---

### 1.4.1 Abbildung

Eine **Abbildung**  $f : M \rightarrow N$  ist eine Teilmenge  $f \subseteq M \times N$ , sodass:

- (i) Für alle  $m \in M$  gibt es ein  $n \in N$  mit  $(m, n) \in f$ .
- (ii) Aus  $(m, n) \in f$  und  $(m, n') \in f$  folgt  $n = n'$ .

$M$  heißt **Definitionsbereich**,  $N$  heißt **Wertebereich**. Schreibweise:  $n = f(m)$ ,  $m \mapsto f(m)$ .

### 1.4.5 Gleichheit von Abbildungen

$f : M \rightarrow N$  und  $g : M' \rightarrow N'$  sind **gleich**, falls  $M = M'$ ,  $N = N'$  und  $f(m) = g(m)$  für alle  $m \in M$ .

### 1.4.6 Bild und Urbild

Sei  $f : M \rightarrow N$ .

- $f(m)$ : das **Bild** von  $m$  unter  $f$ .
- $\text{Bild}(f) = f(M) := \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$ : der **Bildbereich**.
- Ist  $n \in \text{Bild}(f)$ , so heißt  $m \in M$  mit  $f(m) = n$  ein **Urbild** von  $n$ .

### 1.4.9 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei  $f : M \rightarrow N$ .

- $f$  **surjektiv**: jedes  $n \in N$  liegt im Bild von  $f$ .
- $f$  **injektiv**: jedes Element in  $\text{Bild}(f)$  besitzt genau ein Urbild (äquivalent: aus  $f(m) = f(m')$  folgt  $m = m'$ ).
- $f$  **bijektiv**:  $f$  ist surjektiv und injektiv.

### 1.4.13 Identische Abbildung

$\text{id}_M : M \rightarrow M, m \mapsto m$ . Sie ist bijektiv.

#### 1.4.14 Komposition

Seien  $f : L \rightarrow M$  und  $g : M \rightarrow N$ . Die **Komposition**  $g \circ f : L \rightarrow N$  ist definiert durch  $(g \circ f)(l) = g(f(l))$ .

Die Komposition ist **assoziativ** (Prop. 1.4.23):  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

Sind  $f$  und  $g$  bijektiv, so ist  $g \circ f$  bijektiv.

#### 1.4.18 Invertierbarkeit

$f : M \rightarrow N$  heißt **invertierbar**, wenn es eine Abbildung  $f^{-1} : N \rightarrow M$  gibt mit  $f^{-1} \circ f = \text{id}_M$  und  $f \circ f^{-1} = \text{id}_N$ .

#### 1.4.22 Korollar (Charakterisierung invertierbarer Abbildungen)

Sei  $f : M \rightarrow N$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist bijektiv.
- (b)  $f$  ist invertierbar.

### 1.5 Verknüpfungen

---

#### 1.5.1 Verknüpfung

Sei  $M$  eine Menge. Eine **Verknüpfung** auf  $M$  ist eine Abbildung  $\circ : M \times M \rightarrow M$ .

#### 1.5.5 Eigenschaften von Verknüpfungen

Sei  $\circ$  eine Verknüpfung auf  $M$ .

- **kommutativ**:  $a \circ b = b \circ a$  für alle  $a, b \in M$ .
- **assoziativ**:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  für alle  $a, b, c \in M$ .
- **neutrales Element**  $e$ :  $a \circ e = e \circ a = a$  für alle  $a \in M$ .

#### 1.5.7 Invertierbarkeit bzgl. einer Verknüpfung

Besitzt  $\circ$  ein neutrales Element  $e$ , so heißt  $m \in M$  **invertierbar**, wenn es ein  $m' \in M$  gibt mit  $m \circ m' = m' \circ m = e$ . Man nennt  $m'$  **invers** zu  $m$ .

#### 1.5.10 Distributivgesetze

Seien  $\circ$  und  $\#$  zwei Verknüpfungen auf  $M$ . Die **Distributivgesetze** lauten:

$$m_1 \circ (m_2 \# m_3) = (m_1 \circ m_2) \# (m_1 \circ m_3), \quad (m_1 \# m_2) \circ m_3 = (m_1 \circ m_3) \# (m_2 \circ m_3).$$

### 1.6 Körper

---

#### 1.6.1 Körper

Ein **Körper** ist eine Menge  $K$  mit zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  sowie zwei verschiedenen ausgezeichneten Elementen  $0$  und  $1$ , sodass gilt:

- (i)  $+$  ist kommutativ, assoziativ;  $0$  ist neutrales Element; jedes  $a \in K$  besitzt ein additives Inverses  $-a$ .

- (ii)  $\cdot$  ist kommutativ, assoziativ; 1 ist neutrales Element; jedes  $a \in K \setminus \{0\}$  besitzt ein multiplikatives Inverses  $a^{-1}$ .
- (iii) Distributivgesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Beispiele:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ .

$\mathbb{Z}$  ist *kein* Körper (ganze Zahlen  $\neq \pm 1$  nicht invertierbar bzgl.  $\cdot$ ).

### 1.6.4 Proposition (Rechenregeln für Körper)

Sei  $K$  ein Körper. Dann gilt:

- (a)  $a \cdot 0 = 0$  für alle  $a \in K$ .
- (b) Aus  $a \cdot b = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$  (*Nullteilerfreiheit*).
- (c) Das additive Inverse  $-a$  ist eindeutig bestimmt.
- (d) Für  $a \neq 0$  ist das multiplikative Inverse  $a^{-1}$  eindeutig bestimmt.

### 1.6.5 Notation in Körpern

- $-a$ : additives Inverses zu  $a$ ;  $b - a := b + (-a)$ .
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$ : multiplikatives Inverses zu  $a \neq 0$ ;  $\frac{b}{a} := b \cdot \frac{1}{a}$ .

### 1.6.6 Bemerkung

In jedem Körper  $K$  gilt:  $(-1) \cdot a = -a$  für alle  $a \in K$ .

## 2.1 – 2.2 Matrizen: Addition und Skalarmultiplikation

---

### 2.1.1 Matrix

Eine  $m \times n$ -**Matrix** über einem Körper  $K$  ist eine rechteckige Anordnung

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad a_{ij} \in K.$$

$a_{ij}$ : Eintrag an der Stelle  $(i, j)$ . Für  $m = n$ : **quadratische Matrix**;  $a_{ii}$ : **Diagonalelement**. Bezeichnung:  $M_{mn}(K)$ .

### 2.1.5 Matrizenaddition

Für  $A, B \in M_{mn}(K)$ :  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

$+$  ist kommutativ, assoziativ; neutrales Element ist die **Nullmatrix**  $0 \in M_{mn}(K)$  (alle Einträge = 0); additives Inverses:  $(-A) = (-a_{ij})$ .

### 2.2.1 Skalarmultiplikation

Für  $r \in K, A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$ :  $rA = (r \cdot a_{ij})$ .

Regeln (Prop. 2.2.3):  $(rs)A = r(sA)$ ;  $(r + s)A = rA + sA$ ;  $r(A + B) = rA + rB$ ;  $1 \cdot A = A$ .

## 2.3 Matrizenmultiplikation

---

### Matrizenmultiplikation

Seien  $A \in M_{mn}(K)$  und  $B \in M_{ns}(K)$ . Das Produkt  $AB \in M_{ms}(K)$  ist definiert durch:

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

**Merkregel:** Zeile  $i$  von  $A$  auf Spalte  $k$  von  $B$  legen, komponentenweise multiplizieren und aufaddieren.

### 2.3.5 Einheitsmatrix

$I_m = (\delta_{ij}) \in M_{mm}(K)$  mit  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ .

#### Regeln der Matrizenmultiplikation (Prop. 2.3.6, 2.3.8)

- Assoziativgesetz:  $(AB)C = A(BC)$ .
- $I_m A = A$ ,  $A I_n = A$ .
- Im Allgemeinen *nicht* kommutativ:  $AB \neq BA$ .
- Distributivgesetze:  $(A + A')B = AB + A'B$ ;  $A(B + B') = AB + AB'$ .
- $(rA)B = r(AB) = A(rB)$ .

### 2.3.9 Invertierbare Matrix

$A \in M_{nn}(K)$  heißt **invertierbar**, wenn es  $A^{-1} \in M_{nn}(K)$  gibt mit  $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ .

Das inverse Element ist eindeutig bestimmt (falls existent). Produkte invertierbarer Matrizen sind invertierbar:  $(A_1 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}$ .

## 3.1 – 3.2 Elementarmatrizen

---

### 3.1.1 Elementare Zeilenumformungen

Sei  $A \in M_{mn}(K)$ .

- $Z_{ij}$ : Vertausche Zeile  $i$  und Zeile  $j$  ( $i \neq j$ ).
- $Z_i(r)$ : Multipliziere Zeile  $i$  mit  $r \in K$ ,  $r \neq 0$ .
- $Z_{ij}(s)$ : Addiere das  $s$ -fache von Zeile  $j$  zu Zeile  $i$  ( $s \in K$ ,  $i \neq j$ ).

### 3.2.6 Elementarmatrizen

Matrizen in  $M_{mm}(K)$ , die sich aus  $I_m$  durch *eine* elementare Zeilenumformung ergeben:

- $P_{ij} = I_m - E_{ii} + E_{ij} - E_{jj} + E_{ji}$  (entspricht  $Z_{ij}$ )
- $D_i(r) = I_m + (r - 1)E_{ii}$  (entspricht  $Z_i(r)$ )
- $T_{ij}(s) = I_m + sE_{ij}$  (entspricht  $Z_{ij}(s)$ )

Dabei ist  $E_{ij}$  die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle  $(i, j)$ , sonst 0.

**Prop. 3.2.9:** Linksmultiplikation mit einer Elementarmatrix bewirkt die entsprechende Zeilenumformung an  $A$ .

**Prop. 3.2.11 – Invertierbarkeit von Elementarmatrizen**

Elementarmatrizen sind invertierbar; ihre Inversen sind wieder Elementarmatrizen:

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, \quad D_i(r)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{r}\right), \quad T_{ij}(s)^{-1} = T_{ij}(-s).$$

### 3.3 Zeilenäquivalenz

---

#### 3.3.2 Zeilenäquivalenz

$A, B \in M_{mn}(K)$  heißen **zeilenäquivalent** ( $A \sim_Z B$ ), wenn es Elementarmatrizen  $E_1, \dots, E_r \in M_{mm}(K)$  gibt mit

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r B.$$

Eigenschaften:  $A \sim_Z B \Leftrightarrow B \sim_Z A$  (Symmetrie) und Transitivität.