Einsendeaufgaben – Lektion 1

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1.6

Sei $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen a_1, a_2, a_3 (d. h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$).

Behauptung: Jede Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AX = XA$ ist eine Diagonalmatrix.

Beweis:
Sei $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. Wir berechnen AX und XA:

$$AX = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_{11} & a_1x_{12} & a_1x_{13} \\ a_2x_{21} & a_2x_{22} & a_2x_{23} \\ a_3x_{31} & a_3x_{32} & a_3x_{33} \end{pmatrix},$$

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_{11} & a_2x_{12} & a_3x_{13} \\ a_1x_{21} & a_2x_{22} & a_3x_{23} \\ a_1x_{31} & a_2x_{32} & a_3x_{33} \end{pmatrix}.$$

Aus $AX = XA$ folgt durch Vergleich der Einträge für $i \neq j$:

$$a_i\, x_{ij} = a_j\, x_{ij}, \quad \text{also} \quad (a_i - a_j)\, x_{ij} = 0.$$

Da $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ vorausgesetzt ist, folgt $x_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Damit ist X eine Diagonalmatrix:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}. \quad \square$$