Einsendeaufgaben – Lektion 1

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1.4

Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) **Behauptung:** f ist injektiv $\iff$ es existiert eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

Richtung "$\Rightarrow$":

Sei f injektiv. Wir konstruieren $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

Hinweis: Die Aufgabe setzt $M \neq \emptyset$ voraus. Denn mit $M = \emptyset$ ist f trivialerweise injektiv; wenn $N \neq \emptyset$, existiert dann keine Abbildung $g : N \to M$.

Also $M \neq \emptyset$. Sei $m_0 \in M$ ein beliebiges (fest gewähltes) Element. Wir definieren:

$$g = \{(n, m) \in N \times M \mid f(m) = n\} \cup \{(n, m_0) \in N \times M \mid n \notin \mathrm{Bild}(f)\}.$$

Der zweite Teil ist notwendig, da $\mathrm{Bild}(f)$ eine echte Teilmenge von N sein kann, g aber auf ganz N definiert sein muss.

Da f injektiv ist, gibt es zu jedem $n \in \mathrm{Bild}(f)$ genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$. Zu jedem $n \notin \mathrm{Bild}(f)$ gibt es genau ein m_0 mit $(n, m_0) \in g$. Also ist g eine (wohldefinierte) Abbildung.

Nun gilt $g \circ f = \mathrm{id}_M$: Sei $m \in M$ beliebig. f bildet m auf $n := f(m) \in N$ ab. Nach Definition von g bildet g das n wieder auf m ab. Also $g(f(m)) = m$.

Richtung "$\Leftarrow$":

Es existiere $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Zu zeigen: Für alle $m, n \in M$ mit $f(m) = f(n)$ folgt $m = n$.

Aus $f(m) = f(n)$ folgt $g(f(m)) = g(f(n))$, also

$$m = g(f(m)) = g(f(n)) = n,$$

wegen der Voraussetzung $g \circ f = \mathrm{id}_M$. $\square$

b) **Behauptung:** f ist surjektiv $\iff$ es existiert eine Abbildung $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Richtung "$\Rightarrow$":

Da f surjektiv ist, existiert zu jedem $n \in N$ mindestens ein $m \in M$ mit $(m, n) \in f$. Wir definieren $g : N \to M$, indem wir für jedes $n \in N$ ein solches m auswählen und $g(n) := m$ setzen. Es folgt dann:

$$f(g(n)) = f(m) = n,$$

also $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Richtung "$\Leftarrow$":

Es existiere $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Sei $n \in N$ beliebig. Setze $m := g(n) \in M$. Wegen der Voraussetzung gilt:

$$f(m) = f(g(n)) = n.$$

Also $(m, n) \in f$, d. h. $n \in \mathrm{Bild}(f)$. Da n beliebig war, ist f surjektiv. $\square$