Einsendeaufgaben – Lektion 1

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

Aufgabe 1.3

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (|x|, x^2)$

f ist **nicht injektiv**, da z. B. $f(1) = (1, 1) = f(-1)$ gilt.

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x, x)$

Aus $f(x) = f(y)$ folgt $(x, x) = (y, y)$, also muss $x = y$ gelten. Demnach ist f **injektiv**.

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x, 1)$

f ist **nicht surjektiv**, da z. B. $(0, 0) \notin \mathrm{Bild}(f)$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ z \mapsto \begin{cases} \left(\dfrac{z}{2}, 0\right) & \text{wenn } 2 \mid z, \\ \left(0, \dfrac{z+1}{2}\right) & \text{wenn } 2 \nmid z. \end{cases}$

Behauptung: $\mathrm{Bild}(f) = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Richtung "$\subseteq$":

Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig.

- Wenn $2 \mid z$ gilt, gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $2x = z$. Dann ist $f(z) = \left(\frac{z}{2}, 0\right) \in \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- Wenn $2 \nmid z$ gilt, gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $2x = z + 1$. Dann ist $f(z) = \left(0, \frac{z+1}{2}\right) \in \{(0, x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Richtung "$\supseteq$":

Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig.

- $(z, 0) = \left(\frac{2z}{2}, 0\right) = f(2z) \in \mathrm{Bild}(f)$, da $2 \mid 2z$.
- $(0, z) = \left(0, \frac{(2z-1)+1}{2}\right) = f(2z - 1) \in \mathrm{Bild}(f)$, da $2 \nmid (2z - 1)$.

Aus "$\subseteq$" und "$\supseteq$" folgt $\mathrm{Bild}(f) = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. $\square$