

# Einsendaufgaben – Lektion 1

Modul 61111: Mathematische Grundlagen

## Aufgabe 1.2

a) Behauptung:  $\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsanfang** ( $n = 1$ ):

$$\sum_{i=1}^1 i \cdot 2^i = 1 \cdot 2 = 2 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2. \checkmark$$

**Induktionsschritt** ( $n \rightarrow n+1$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i &= (n+1) \cdot 2^{n+1} + \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \\ &= 2^{n+1}((n+1) + (n-1)) + 2 \\ &= 2^{n+1} \cdot 2n + 2 \\ &= ((n+1) - 1) \cdot 2^{(n+1)+1} + 2. \quad \square \end{aligned}$$

b) Behauptung:  $6 \mid 7^n - 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsanfang** ( $n = 1$ ):

$$7^1 - 1 = 6, \quad \text{also gilt } 6 \mid 7^1 - 1. \checkmark$$

**Induktionsschritt** ( $n \rightarrow n+1$ ): Zu zeigen ist  $6 \mid 7^{n+1} - 1$ .

Es gilt:

$$7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 = 7^n \cdot 7 - 7 + 6 = (7^n - 1) \cdot 7 + 6.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $6 \mid 7^n - 1$ . Da außerdem  $6 \mid 6$  gilt, folgt  $6 \mid (7^n - 1) \cdot 7 + 6$ , denn allgemein gilt: aus  $a \mid b$  und  $a \mid c$  folgt  $a \mid b + c$  (elementare Zahlentheorie). Wegen der Gleichheit  $(7^n - 1) \cdot 7 + 6 = 7^{n+1} - 1$  ist die Behauptung bewiesen.  $\square$